

ACTA
PHYSICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT

P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS 2



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
BUDAPEST, 1954

ACTA PHYSICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgyköréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« – 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultúra*« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER LICHTQUELLEN FÜR SPEKTRALANALYSE

EIN ELEKTRONISCH GESTEUERTER FUNKENERZEUGER

Von

Á. BARDÓCZ

UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZENTRALFORSCHUNGSIINSTITUT FÜR PHYSIK, SPEKTROSKOPISCHE ABTEILUNG, BUDAPEST,

(Vorgelegt von I. Kovács. — Eingegangen: 25. VI. 1953.)

Die Steuerung der in der Spektralanalyse gebrauchten Hochspannungsfunkenerzeuger kann man mit Elektronenröhren kleiner Leistung, wobei die gesteuerte Energie die Röhre nicht durchfliesst sondern nur die Funkenentladung hervorruft, durchführen. In der vorliegenden Arbeit steuert eine Thyratronröhre die Funkenentladung. Das Wesentliche der elektronischen Steuerung besteht darin, dass zwei hintereinander geschaltete Funkenstrecken verwendet werden, deren eine ein, hinter eine Thyratronröhre geschalteter, ohmscher Widerstand überbrückt. Wenn das Gitter der übrigens durch negative Vorspannung gesperrten Thyratronröhre einen positiven Spannungsstoss erhält, wird erst die nicht überbrückte Funkenstrecke durchschlagen, dann die durch die Thyratronröhre und ohmschen Widerstand überbrückte, wodurch die Hauptentladung eingeleitet wird. Das elektronische Steuersystem vermindert die Unsicherheiten anderer Steuerungssysteme bedeutend, außerdem kann die Zahl der Funken in der Zeiteinheit durch die elektronische Steuerung zwischen weiten Grenzen variiert werden. Dies bringt mit sich, dass auch der Takt des Abreissbogens und des Niederspannungsfunkens leicht geändert werden kann.

EINLEITUNG

Bekanntlich wird bei der Spektralanalyse das Versuchsmaterial in der Lichtquelle verdampft, der Dampf zur Lichtemission angeregt, das entstandene Licht in einem Spektralapparat zerlegt und aus der Intensität der so erhaltenen Spektrallinien auf die prozentuelle Zusammensetzung des Stoffes gefolgert. Die Vorbedingung jedwelcher chemischen Spektralanalyse ist, den Verlauf der Lichtemission in der Lichtquelle reproduzierbar herstellen zu können.

Die ganz aussergewöhnlichen Erfolge, welche die Emissions-Spektralanalyse auf dem Gebiete der qualitativen und quantitativen Analyse in den letzten 20 Jahren erreichte, ist grösstenteils dem zuzuschreiben, dass es gelang die zur Analyse unentbehrliche Lichtemission in entsprechender Weise durchzuführen, solche Anregergeräte zu bereiten und reproduzierbare Anregungsverhältnisse zu schaffen, wodurch für die Wissenschaft und Industrie Analysen entsprechender Genauigkeit durchgeführt werden können.

In den verflossenen 25 Jahren erschienen im wissenschaftlichen und angewandten Schrifttum viele Arbeiten über die Anregungsgeräte der chemischen Spektralanalyse [1—72]. Die verhältnismässig grosse Zahl der diesbezüglichen Arbeiten weist auf die Wichtigkeit dieser Frage hin. In diesen Arbeiten werden teilweise neue Anregereinrichtungen oder ihre Anwendungsmethoden beschrieben, zum Teil werden deren Vor- und Nachteile diskutiert. Da die Anregung

eine der wichtigsten Faktoren der chemischen Spektralanalyse ist und eine bedeutende Fehlermöglichkeit der Spektralanalyse Folge der Unsicherheit der Anregung ist, wurde vielfach versucht, die Anregungseinrichtungen zu vervollkommen.

Unter den heute bekannten spektroskopischen Lichtquellen ist die best reproduzierbare die elektrische Funkenlichtquelle und diese bietet betreffs Vervollkommenung das meiste.

Da sich in der spektralanalytischen Praxis die direkten Lichtmessverfahren immer mehr verbreiten und die Zunahme der Genauigkeit als Folge der Vervollkommenung der Lichtquellen bei diesen Verfahren bedeutend grösser ist als bei dem photographischen Verfahren, kann man mit Sicherheit annehmen, dass die direkten Lichtmessverfahren die Vervollkommenung der spektroskopischen Lichtquellen mit sich bringen werden. Hieraus folgt, dass die Stabilisierung der spektroskopischen Lichtquellen schon jetzt wichtig ist, in der Zukunft aber noch wichtiger sein wird. Die Erhöhung der Genauigkeit der jetzigen Verfahren mit direkter Ablesung kann man nur von der Vervollkommenung der Anregung erwarten. Vollendete Lichtquellen haben den Vorteil, dass bei dem direkten Ableseverfahren Bezugslinien eventuell überflüssig sein werden [54].

Als Folge des bisher Diskutierten, hatte Verfasser Versuche ähnlichen Zweckes durchgeführt, worüber hier berichtet werden soll. Vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über die gebräuchlichen Funkenerzeuger und gibt die Beschreibung eines prinzipiell neuen elektronisch gesteuerten spektroskopischen Anregersystems, dessen Anwendungsmöglichkeiten die der bisherigen Systeme übertreffen.

Es ist ebenfalls bekannt, dass der elektrische Funke nicht nur als selbstständige Lichtquelle grosser Energie verwendet wird, sondern auch mit kleiner Leistung zum Zünden des Abreissbogens und des kondensierten Niederspannungsfunkens [13, 15, 25, 26, 30, 35—38, 41, 42, 46, 48—52, 56—60, 65, 68, 70—72]. Diese Anwendung des Funkens wird in der Arbeit ebenfalls diskutiert.

HISTORISCHER ÜBERBLICK

Ungesteuerte und mittels Hilfsfunkenstrecke gesteuerte Funkenerzeuger

In Abb. 1a ist die Schaltung für die Erzeugung spektroskopischer Analysenfunken in seiner klassischen Form, wie ihn die Bahnbrecher der Spektralanalyse (Hartley, Pollok und Leonard, de Gramont [2, 3, 5]) gebrauchten, abgebildet. Ein Transformator (früher Induktorium) [2, 3] lädt einen Kondensator soweit auf, wie dies die Entfernung der Elektroden der Analysenfunkenstrecke F bestimmt. Hat die Ladung des Kondensators die zum Durchschlagen der Funken-

strecke F nötige Spannung erreicht, erfolgt die Entladung durch den Entladungskreis. Im Schaltungsschema ist links vom Kondensator der Ladekreis, rechts der Entladekreis angedeutet. Die in den Entladekreis eingebaute Selbstinduktion dient zum Einstellen der Entladungsverhältnisse, der ohmsche Widerstand im Ladestromkreis zur Einstellung der Ladungsverhältnisse.

Die Zahl der Funken in der Zeiteinheit sowie die Spannung des aufgeladenen Kondensators vor der Entladung wird bei den nach dem Schaltungs-

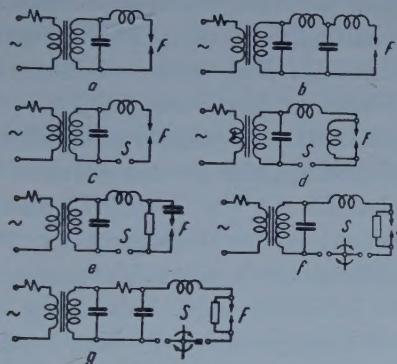


Abb. 1. Elektrische Schaltung verschiedener Funkenerzeuger. a — Einfacher, ungesteuerter Funkenerzeuger. b — Wolbanks Funkenerzeuger. c — Funkenerzeuger mit fester Steuerfunkentstörer. d — Rajskij's Funkenerzeuger. e — Die von Lévy abgeänderte Rajskij'sche Schaltung. f — Funkenerzeuger mit synchron rotierender Steuerfunkentstörer. g — Vincent und Sawyer'scher Funkenerzeuger. F — Analysenfunkentstörer. S — Steuerfunkentstörer.

schema der Abb. 1a gebauten Funkenerzeuger nicht immer gleich sein. Bei entsprechender Einstellung der Schaltelemente kann man aber regelmässige Funkenfolgen erhalten. Diese Eigenschaft der Funkenerzeuger haben Kaiser und Wallraff [17] bzw. Kaiser [28] dann Höfert und Keck [34] ausführlich und gründlich diskutiert. Die Schaltung des von Scheibe und Mitarbeitern eingeführten Funkenerzeugers ist ähnlich [1, 9, 11, 22]. Bei diesen Anregern ist die Funkenzahl pro Sekunde gleich, nicht aber die Durchschlagsspannung der einzelnen Funken. Boas [4] fertigte einen solchen Funkenerzeuger, welcher in der Zeiteinheit Funken stabiler Zahl liefert und bei dem alle Funken gleiche Durchschlagsspannung aufweisen. Dies wird mit Hilfe eines elektrostatischen Relais erreicht, welches die Elektroden immer in gleicher Entladungsspannung entsprechenden Abständen hält. Hier wollen wir auch den von Wolbank [18, 19] (Abb. 1b) eingeführten Funkenerzeuger erwähnen, wo sich dem gebräuchlichen, Kapazität und Selbstinduktion enthaltendem Teil ein weiterer, Selbstinduktion und Kapazität enthaltender Schwingungskreis anschliesst.

Will man die durch die Analysenverhältnisse bedingene, dem Abstand der Analysenfunkenstrecke F entsprechende Ladespannung des Kondensators erhöhen, muss hinter die Analysenfunkenstrecke eine zweite, feste oder rotierende Steuer- oder Hilfsfunkenstrecke S geschaltet werden. Dieser Gedanke stammt von *Feussner* [6—8]; seine Ausführung mit stabiler Funkenstrecke zeigt die Abb. 1c, die mit rotierender Funkenstrecke Abb. 1f.¹

Charakteristisch ist für die Schaltung der Abb. 1c. [23, 24], dass die Ladespannung des Kondensators zwar grösser ist als ohne Steuerfunkenstrecke, diese ist jedoch Schwankungen unterworfen, da die Ladespannung des Kondensators durch die Verhältnisse der Analysenfunkenstrecke beeinflusst wird. Diesen Einfluss kann man ausschalten, wenn man die Funkenstrecke mit einer Selbstinduktion überbrückt (Abb. 1d.). Die erwähnte Selbstinduktion kann man auch durch einen ohmschen Widerstand ersetzen [29], wie dies heute bei den Funkenerzeugern mit Steuerfunkenstrecke allgemein üblich ist [56]. Die Anwendung dieser Schaltung für spektroskopische Zwecke stammt von *Raijskij* [20]. Das Schaltschema der Abb. 1e. ist die von *Lévy* [47] durchgeführte Abänderung des in Abb. 1d. angegebenen, wo der Durchgang der vom Transformator kommenden Niederfrequenzströme durch einen hinter die Analysenfunkenstrecke geschalteten Kondensator behindert wird. Vollständig einflusslos ist die Analysenfunkenstrecke auf die Ladespannung des Kondensators bei der *Feussnerschen* [6—8] Drehschalter-Steuerung (Abb. 1f), wo der Kondensator während dem Aufladen vom Entladungskreis abgeschaltet ist. Bei dieser Steuerung verteilt sich die Kondensatorennergie wegen der verschiedenen Längen der Steuerfunkenstrecken nicht unbedingt gleichmässig auf die Steuerfunk- und die Analysenfunkenstrecke. Eine weitere Ausführung, des mittels Drehschalter gesteuerten Funkenerzeugers zeigt Abb. 1g [40].

Durch Erhöhung der Funkenzahl während einer halben Periode der zum Betrieb des Funkenerzeugers benützten Wechselspannung wird die Genauigkeit der Analyse gesteigert. Eine solche Entladungsweise wird gewöhnlich nach Schaltung 1d erzeugt [45, 53, 56], nur muss man durch Einblasen von Luft für Entionisierung der Steuerfunkenstrecke zwischen den einzelnen Entladungen sorgen. *Fowler* und *Wolfe* [45] verwendeten erstmals Lufteinblasen zur Steuerung spektroskopischer Lichtquellen. Eine ausführliche Besprechung dieser Frage befindet sich in den Arbeiten von *Enns* und *Wolfe* [53, 56].

Erwähnenswert sind auch die vielen Kunstgriffe, welche einen verlässlicheren Betrieb der schon beschriebenen Funkenerzeuger bezweckten. Es wurde um gleichmässigeres Durschlagen der Analysen- und Steuerfunk in der Funkenstrecke zu erreichen, ultraviolette Bestrahlung angewendet [16, 19, 44]. *Balz*, *Kaiser* und *Keck* [31] verwendeten zur Verbesserung der Zündung eine Lock-

¹ In sämtlichen Abbildungen sind die Elektroden der Steuerfunkenstrecken S durch Kreise bezeichnet, zum Unterschiede von den mit Pfeilen bezeichneten Elektroden der Analysenfunkenstrecke F.

spitze. Eine solche ist auch zur Verbesserung der Verhältnisse bei der Analysen- wie auch bei der Steuerfunkentstrecke anwendbar [43]. Die um eine isolierte Hochspannungsleitung entstehende Koronaentladung hat ebenfalls ionisierende Wirkung [43]. Diese Erscheinung verwendete *Balz* [43] zur Ionisierung der Analysenfunkentstrecke in der Weise, dass er in deren Nähe einen isolierten, auf Hochspannung liegenden Leiter anbrachte. Stark ionisierend wirkt eine stromdurchflossene glühende Spule oder Spirale unterhalb der Funkenstrecke um die untere Elektrode angebracht dadurch, dass die vom Draht austretenden Elektronen in die Funkenstrecke gelangen und so die Entladung erleichtern [63].

In einzelnen Fällen bläst man Luft in die Analysenfunkentstrecke um die Anregungsverhältnisse zu verbessern [7, 14, 21, 32, 33, 63, 69], die Meinungen betreffs Wirkung sind aber verschieden [17, 28, 39].

Um die doppelte Funktion des Funkens, Verdampfung sowie Anregung zu trennen, legte *Rouse* [73] das Material in einen Tiegel, verdampfte es durch Hochfrequenz-Heizung und erregte die Dämpfe durch Funken.

Elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger

Die im vorgehenden Abschnitt besprochene Steuerung durch stabile oder rotierende Hilfsfunkentstrecken der spektroskopischen Funkenlichtquellen ist nicht die endgültige Lösung, sondern höchstens eine Annäherung der endgültigen Lösung des Problems. Die endgültige Lösung der Steuerung muss wahrscheinlich mit Hilfe der aus der Elektronik bekannten Methoden erreicht werden. Gegenwärtig können die elektronischen Schaltungselemente die in der Spektroskopie verwendeten verhältnismässig grossen Energien nur begrenzt und mit kostspieligem Betrieb steuern.

Die mit den gebräuchlichen Vakuumröhren arbeitenden Schwingungsanreger können höchstens die zum Zünden von Abreissbögen und Niederspannungs-Funkenentladung nötige Energie liefern. Mit einer solchen Ausführung erregt *Findeisen* [15] bei seinem Abreissbogenerzeuger die Hochspannungs-Zündströme mit induktiv rückgekoppelten Röhrengenerator (Abb. 2a). Die Überführung der Zündspannung auf die Bogenstrecke erfolgt mit Hilfe des Tesla-Transformators T. Die Anwendung von Thyatronröhren zur Erzeugung der Zündspannungen empfohl erstmals *Kemmler* [38]. Zur Erzeugung der Zündfunken für Abreissbögen verwendeten *Dwyer* [59] (Abb. 2b) bzw. *Bardócz* [70—72] (Abb. 2c) thyatrongesteuerte Schaltungen.

Einen elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger für grosse Leistungen bauten zuerst *Mireliss-Malpica* und *Berry* [27] laut Abb. 2d. Das Schaltelement ist hier Ignitron im primären Stromkreise eingebaut, welches zur Schaltung beträchtlicher Energien geeignet ist. Zur Schaltung und Übertragung grosser Energien geeigneter weiterer elektronischer Schalter dient die im letzten Kriege

entwickelte Trigatronröhre [74]. Abb. 2e zeigt das Schaltungsschema [50, 51] eines mit dieser Röhre aufgebauten Funkenerzeugers. Zu erwähnen ist noch, dass es üblich ist in einzelnen Fällen bei Hochspannungs-Funkenerzeugern auf der Hochspannungsseite zwischen Transformator und Kondensator Gleichrichter-Dioden einzubauen [64] (Abb. 2f). Dieses Verfahren benützte bei Niederspannungs-Funkenerzeugern als erster Schmidt [35]. Man kann auf diese Weise auch von der Steuerung des Ladekreises sprechen, was übrigens schon beim Anreger von *Mireless-Malpica* und *Berry* [27] der Fall ist.

Im spektralanalytischen Schrifttum findet man ausser den besprochenen Funkenerzeugern noch andere elektronische Hochfrequenz-Funkenerzeuger,

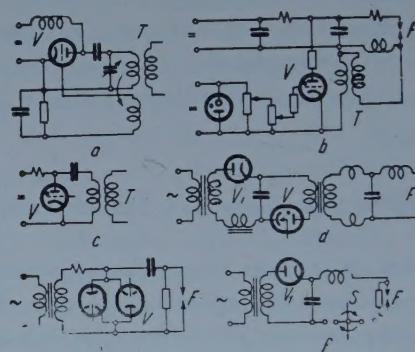


Abb. 2. Elektrische Schaltungen verschiedener elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger. a — Induktiv rückgekoppelter Vakuumröhrengenerator zur Zündspannungserzeugung (Find-eisen). b, c — Mit Thyatronröhre gesteuerter Zündfunkenerzeuger (Dwyer, Bardócz). d — Mit Ignitron gesteuerter Funkenerzeuger grosser Energie (Mireless-Malpica-Berry). e — Mit Trigatron gesteuerter Funkenerzeuger grosser Energie (Braudo und Clayton). f — Steuerung des Ladekreises am Funkenerzeuger mit rotierender Steuerfunkentstrecke (Rankin). F — Analysenfunkentstrecke. S — Steuerfunkentstrecke. T — Tesla Transformator. V — Die Entladung steuerndes Glied. V_1 — Die Ladung steuerndes Glied.

welche zu lokaler Mikroanalyse oder anderen speziellen Zwecken verwendet wurden [75—80], jedoch bleiben die in diesen elektronisch geschalteten Stromstärken weit hinter den Stromstärken, welche mit den hier zur Erörterung gelangenden Funkenerzeugern geschaltet werden, zurück.

VORVERSUCHE ZUR AUSBILDUNG EINES NEUEN ELEKTRONISCH GESTEUERTE FUNKENERZEUGERS

Vor der Ausbildung des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers, den wir im folgenden beschreiben wollen, führten wir einige erwähnenswerte Versuche durch. Als erstes versuchten wir, die Steuerfunkentstrecke eines Hochspannungs-Funkenerzeugers durch starke Koronaentladung fremder Herkunft zum Durchschlagen zu bringen. Aus diesem Grunde umgaben wir die Steuerfunkentstrecke

mit einem Ring, aus welchem in Richtung der Funkenstrecke 8—12 Grammophonnadeln herausstanden. Der Abstand der Steuerfunkenstrecke wurde so gewählt, dass bei gegebener Ladespannung des Kondensators eben noch kein Durchschlag erfolgte. Den Hochspannungspol eines Tesla-Transformators verbanden wir mit dem Ring, die Hochspannung erzeugten wir nach dem Schaltungsschema der Abb. 2c. Das Ergebnis war, dass die gewünschte Steuerung ausblieb, wenn die Nadeln von der Steuerfunkenstrecke entfernt waren. Wurden aber die Nadeln nahe an die Steuerfunkenstrecke gebracht, konnte die gewünschte Steuerung erreicht werden, die Entladung erfolgte jedoch von einer Elektrode der Steuerfunkenstrecke über die Grammophonnadeln zur anderen Elektrode. Weitere Untersuchungen ergaben, dass es ganz gleichgültig ist, ob das Überleiten der Hochspannungs- und Hochfrequenzströme zur Funkenstrecke mit Hilfe von Nadeln oder auf andere Weise erfolgt. Die Steuerung konnte auch durch Anwendung

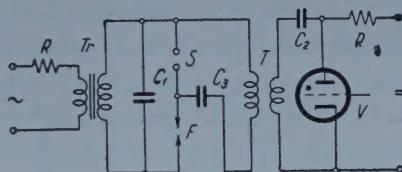


Abb. 3. Elektrische Schaltung des mittels Hochfrequenz gesteuerten Hochspannungsfunkenerzeugers. C_1 , C_2 , C_3 — Kondensatoren. F — Analysenfunkenstrecke. R — ohmsche Widerstände. S — Steuerfunkenstrecke. Tr — Hochspannungstransformator. T — Tesla Transformator.

eines Bleches zwischen den beiden Elektroden der Steuerfunkenstrecke senkrecht zu deren Symmetriearchse aufrecht erhalten werden.

Die Steuerung war auch in dem Fall wirkungsvoll, wenn wir die Funkenstrecke in zwei unabhängige Teile teilten, wodurch eine zur Steuer-, die andere zur Analysenfunkenstrecke wurde.

Auf diese Art konnte die Schaltung der Abb. 3 ausgebildet werden, wo S die Steuer-, F die Analysenfunkenstrecke bedeutet. Der Hochspannungs-Transformator Tr ladet den Kondensator C_1 . Die zur Zündung nötige Energie liefert der von einer Gleichstromquelle gespeiste Kondensator C_2 . Die Gleichstrom-Speisung ist darum angezeigt, da hierdurch die Phaseneinstellung der Zündspannung und Ladespannung des Kondensators C_1 überflüssig wird. Der aufgeladene Kondensator C_2 wird über die Thyatronröhre V und Primärspule des Tesla Transformators T entladen, wodurch in die Sekundärspule des Tesla-Transformators Hochspannung induziert wird. Diese Hochspannung durchschlägt die Steuerfunkenstrecke S . Der gesamte Abstand von S und F wird so eingestellt, dass über diese C_1 sich eben noch nicht entladen kann. Sobald aber S durchschlägt, erscheint die gesamte Ladespannung von C_1 bei F , und es erfolgt auch hier der Durchschlag. C_3 ist ein Isolierkondensator, R ein ohmscher Widerstand. Die Thyatronröhre V steuert ein Impulsgenerator [70—72].

Mit einer Schaltung laut Abb. 3 beobachten wir, dass die Entladungen gut steuerbar sind, solange die Ladespannung des Kondensators C_1 , 10 000 Volt nicht überschreitet. Mit dem Anwachsen der Ladespannung des Kondensators C_1 muss gleichzeitig die Entfernung der Elektroden der Steuerfunkenstrecke vergrössert werden. Bei grösserem Abstand der Elektroden genügt die schwache Tesla-Entladung nicht mehr zum Einleiten der Entladung des Kondensators C_1 . Dies ist nur dann möglich, wenn der Zündstromkreis grosse Energien liefert, wodurch die Anwendbarkeit der Schaltung in Frage gestellt wird.

DER NEUE ELEKTRONISCH GESTEUERTE FUNKENERZEUGER

Funkenerzeuger mit Einfachsteuerfunkenstrecke

Das Wesentliche des neuen elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers, den wir hier beschreiben wollen, besteht darin, dass die Entladung der im Kondensator aufgespeicherten Anregungsenergie durch eine Steuerfunkenstrecke erfolgt.

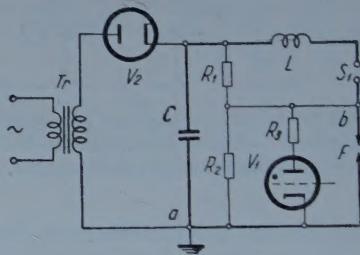


Abb. 4. Schaltungsschema des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke. C — Kondensator. S_1 — Einfachsteuerfunkenstrecke. F — Analysenfunkenstrecke. L — Selbstinduktionsspule. R_1 , R_2 — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände. R_3 — ohmscher Widerstand. Tr — Hochspannungstransformator. V_1 — Thyatronröhre. V_2 — Gleichrichterdiode. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

Die Entladung wird durch eine Elektronenröhre eingeleitet, die Entladungsenergie fliesst jedoch nicht durch die Elektronenröhren, sondern über die schon erwähnte Funkenstrecke. Auf diese Weise können unbegrenzte Energien gesteuert werden unter Beibehaltung sämtlicher Vorteile der elektronischen Steuerung.

Die elektrische Schaltung des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers zeigt Abb. 4. Der Hochspannungstransformator Tr ladet den Kondensator C über die Diode V_2 . S_1 ist die Steuerfunkenstrecke, F die Analysenfunkenstrecke. Die Aufgabe der Widerstände R_1 und R_2 ist, die an den Polen des Kondensators C herrschende Spannung auf die Funkenstrecken S_1 und F gleichmässig zu verteilen. Aus diesem Grunde können die ohmschen Widerstände R_1 und R_2 auch durch Kondensatoren ersetzt werden. V_1 ist eine gasgefüllte Triode (Thyatron) welche durch negative Vorspannung gesperrt ist.

Die Wirkungsweise des gemäss Abb. 4. geschalteten Systems ist folgende: Nachdem der Kondensator auf die Scheitelspannung des Wechselstrom liefernden Transformators Tr aufgeladen ist, geben wir in der nächsten Halbperiode auf das Gitter der durch negative Vorspannung gesperrten Röhre V_1 einen positiven Spannungsstoss, wodurch diese zündet. Infolgedessen gerät eine Elektrode der Funkenstrecke S_1 praktisch auf das Potential des Punktes »a« der Schaltung, da R_3 bedeutend kleiner ist als R_1 , bzw. R_2 . Die Funkenstrecken S_1 und F müssen so eingestellt werden, dass zwischen ihnen auch bei voll aufgeladenem C sicher eben noch kein Durchschlag erfolgt. Indem wir die gemeinsame Elektrode der doppelten Funkenstrecke $S_1 — F$ auf das Potential des Punktes »a« legen, wird die ganze Ladespannung des Kondensators C an den Elektroden des S_1 erscheinen. Diese annähernd doppelte Spannung wird S_1 durchschlagen. Hiernach beginnt die Entladung des Kondensators C über S_1 , den ohmschen Widerstand R_3 und Röhre V_1 . Des durchfliessenden Stromes wegen, — da 'der Durchschlag und der darauffolgende Stromfluss für S_1 einen Kurzschluss bedeutet — wird die an den Polen des Kondensators herrschende ganze Spannung an den Klemmen des R_3 erscheinen, bzw. an der Funkenstrecke F , demzufolge auch diese durchschlagen wird. Nach dem Durchschlagen von F wird sich die Entladung des Kondensators C über $S_1 — F$ fortsetzen. Nach dem Durchschlagen der Funkenstrecken S_1 und F wird auf die Klemmen des ohmschen Widerstandes R_3 nur die Bogenspannung fallen, mithin wird der Stromfluss hier gering sein. Je nach den elektrischen Daten des Stromkreises $C — S_1 — F$, in welchen man den Anforderungen der Analyse gemäss noch eine Selbstinduktion — allenfalls auch noch ohmschen Widerstand — einschalten kann, wird die Thyratronröhre V_1 entweder am Ende der Entladung des Kondensators C , oder im Falle niedriger Schwingungszahl des Entladekreises, noch vor Beendigung der Entladung auslöschen.

Die zur Steuerung der Röhre V_1 nötigen positiven Spannungsstösse kann man mittels mechanischen Schalters oder auf elektrischem Wege zuführen. Mit der in Abb. 4 angegebenen Anordnung kann man pro Sekunde, der Periodenzahl der Netzspannung entsprechend oder mit geringerer Häufigkeit, Funken erzeugen.

Die Wirkungsweise der Versuchseinrichtung veranschaulichen die Oszillogramme der Abb. 20 und 21, auf welche wir noch zurückkommen.

DIE VERSUCHSANORDNUNG

Bei sämtlichen Messungen waren die technischen Angaben der Versuchsanordnung die folgenden. Der Transformator Tr (Abb. 4, Abb. 10 u. 17) hat eine Übersetzung von 220/15 000 Volt, diesem ist ein Spannungsregler-Transformator vorgeschaltet, mit dessen Hilfe die Spannung an den Klemmen des Trans-Kondensators C auf den gewünschten Wert einstellbar ist. Zwischen dem Trans-

formator Tr und dem Spannungsregler-Transformator befindet sich ein Widerstand von 3 Ohm, welcher die Überlastung der Gleichrichterröhren verhindert, wenn die Funkenstrecken S_1 bzw. F im Kurzschluss sind. V_2 ist eine Gleichrichterdiode, mit einer Betriebsspannung von 20 000 Volt, höchste Belastung 1 Ampere, Inversspannung 40 000 Volt. C ist teilweise Minos, teilweise Dubilier-scher Kondensator mit Glimmerisolation und einer Kapazität von 1 000—20 000 pF. $R_1 — R_2 = 100$ Megohm. V_1 ist eine gasgefüllte Triode (Thyratron) mit 10 000 Volt Betriebsspannung, höchste Stossbelastung 16 Ampere.

Die Einfach- bzw. Doppelfunkenstrecken S_1 und S_2 , (siehe später) aus drei Zink- oder Kohlenscheiben bestehend, waren symmetrisch angeordnet. Die mittlere Scheibe hatte einen Durchmesser von 58 mm und war 27 mm dick, die beiden seitlichen Scheiben mit einem Durchmesser von 45 mm waren 23 mm dick. Die gegenüberstehenden Flächen der Zinkscheiben waren konzentrisch gerippt. Die Kohlenscheiben hatten glatte Flächen. Die Entfernung der seitlichen Scheiben von den mittleren konnte eingestellt werden, mit entsprechender Vorrichtung auch unter Spannung. Zwecks Vermeidung der Erwärmung und damit Sicherung der Reproduzierbarkeit der Messungen, waren die Zinkscheiben so gestaltet, dass sie während dem Betrieb mit Wasser gekühlt werden konnten. Aus diesem Grunde waren die Zinkscheiben hohl und mit Rohrstutzen zum Zu- und Ableiten vom Wasser versehen. Bei diesen Messungen waren in den Abb. 4, 10 und 17 die Punkte »b« geerdet, mithin konnte die mittlere Scheibe direkt an die Wasserleitung angeschlossen werden. Bei solcher Schaltung waren die unter Spannung stehenden Elektroden der Steuerfunkenstrecken S_1 bzw. S_2 mit Hilfe von isoliert aufgestellten Behältern gekühlt. Die Temperatur des Kühlwassers betrug 14—17° C. Bei dem Betrieb mit Einfachsteuerfunkenstrecke war die eine seitliche Scheibe mit der mittleren leitend verbunden. In den Abb. 5, 6, 7, 8 und 9 bezeichneten wir die Einzelfunkenstrecke mit zwei Scheiben (beziffert mit S_1), in den Abb. 11, 12, 13, 14, 15 und 16 die Zweifachfunkenstrecke mit drei Scheiben (beziffert mit S_2). Will man keine Wasserkühlung anwenden, sind die Zinkscheiben durch Kohlen- oder Graphitscheiben gut ersetzbar. Die Widerstandsketten R_1 und R_2 stellten wir aus je 30 Stück bis 5 Watt belastbaren Radiowiderständen zusammen, deren Einzelwiderstand 3·3 Megohm betrug. R_3 und R_4 (Abb. 4, 10, 17) sind bei niedrigeren Werten bis 100 Watt, bei grösseren Werten entsprechend weniger belastbare Widerstände. Die Elektroden der Analysen funkenstrecke bestanden immer aus spektralreiner Kohle von 6 mm Durchmesser mit ebenen Endflächen. Vertikal auf die Symmetrieachse der Elektroden waren Lockspitzen angebracht.

Das Gitter der steuernden Thyratronröhre V_1 steuerte ein Impulsgenerator, in welchen auch die zum Absperren der Röhre V_1 nötige negative Vorspannung eingebaut ist. Der Impulsgenerator kann pro Sekunde 100 oder weniger positive Spannungsstösse erzeugen. Die Zahl der Spannungsstösse geringerer Häufigkeit pro Sekunde ist mit irgendeiner Subharmonischer der Frequenz der Netz-

spannung gleich. Selbstverständlich arbeitet der Impulsgenerator synchron mit der Netzspannung.

Während den Untersuchungen wurden richtige Einstellung und regelmässiges Arbeiten der Anordnung mittels Kathodenstrahl-Oszilloskop kontrolliert. Bei der Kontrolle beobachteten wir den Ablauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C.

*Charakteristische Eigenschaften des Funkenerzeugers
mit Einfachsteuerfunkentstrecke*

Beim Bestimmen der elektrischen Eigenschaften des Funkenerzeugers neuen Systems untersuchten wir, welchen Einfluss die Kapazität des Kondensators C der

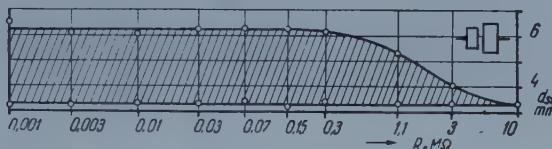


Abb. 5. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkentstrecke. d_{S_1} — Elektrodenabstand der Steuerfunkentstrecke S_1 . R_3 — ohmscher Widerstand. d_F — 3 — 9 mm, U_C — 18 000 Volt. C — 10 000 pF, Funkenhäufigkeit 50/s. Das Wirkungsgebiet ist gestrichelt.

Abb. 4, die Ladespannung U_C , der ohmsche Widerstand R_3 , sowie der Abstand der Elektroden der Steuerfunkentstrecke S_1 und der Analysenfunkentstrecke F auf die Betriebsverhältnisse ausüben. Den Zusammenhang dieser fünf Parameter bestimmten wir durch Messungen.

Unser erstes Ziel war die Festsetzung des Einflusses des ohmschen Widerstandes R_3 auf die Wirkungsweise des Systems, und nachher bei dem als optimalen Wert gefundenen Widerstandswert zu bestimmen inwiefern das System bei verschiedenen Einstellungen stabil ist.

Ändert man den Elektrodenabstand d_{S_1} der Steuerfunkentstrecke während dem Betrieb des Funkenerzeugers nach Abb. 4, so kann man feststellen, dass es einen solchen grössten und kleinsten Elektrodenabstand gibt, zwischen welchen das Anregersystem regelmässig arbeitet. Dieses Elektroden-Intervall Δd_{S_1} wollen wir in der Folge »Wirkungsgebiet« nennen.

Die Ergebnisse ähnlicher Messungen zeigt die Abb. 5. Auf dieser Abbildung sehen wir bei welchen Elektrodenabstand d_{S_1} der Steuerfunkentstrecke S_1 das System regelmässig arbeitet, wenn man bei Elektrodenabstand d_F = 3·0, 6·0 und 9·0 mm der Analysenfunkentstrecke F , den Widerstand R_3 ändert. Regel-

mässig arbeitend nennen wir die Wirkungsweise, wenn das Oszilloskop Abb. 20 entsprechende Bilder zeigt und weder ein Ausbleiben des Zündens, noch unregelmässiges Zünden ohne Steuerung der Funkenstrecken vorkommt. Die Analysenelektrodenabstände $d_F = 3 \cdot 0, 6 \cdot 0$ und $9 \cdot 0$ mm sind übrigens bei den Versuchen immer beibehalten worden.

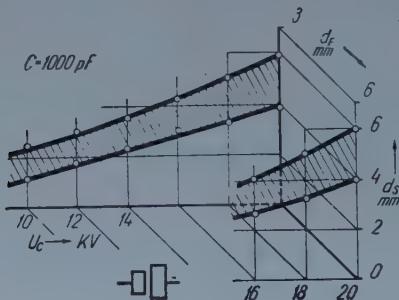


Abb. 6. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand d_{S1} der Steuerfunkentstrecke, von der Ladespannung U_C und von dem Abstand der Analysenelektroden d_F . $C = 1000 \text{ pF}$, $R_3 = 20000 \text{ Ohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

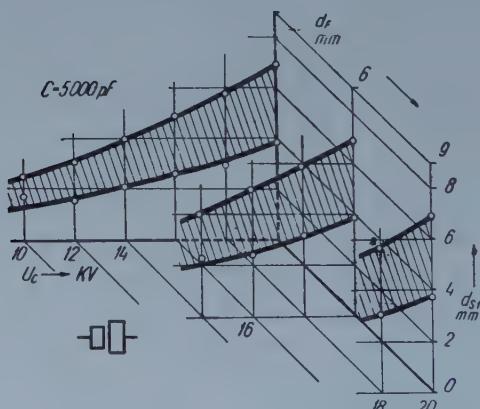


Abb. 7. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand d_{S1} der Steuerfunkentstrecke, von der Ladespannung U_C und von dem Abstand der Analysenelektroden d_F . $C = 5000 \text{ pF}$, $R_3 = 20000 \text{ Ohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Auf der Abscisse der Abb. 5 sind die R_3 -Werte im logarithmischen Massstab aufgetragen, auf der Ordinate der Abstand d_{S1} der Elektroden der Steuerfunkentstrecke S_1 . Wenn die Ladespannung des Kondensators $C = 18000$ Volt beträgt, $C = 10000 \text{ pF}$ ist und der Abstand der Elektroden der Analysenfunkentstrecke F zwischen 3 — 9 mm variiert, so ist bei der Änderung des Widerstandes R_3 zwischen 0,001 — 0,2 Megohm ein betriebssicheres Wirkungsgebiet

in dem Falle erreichbar, wenn der Abstand der Elektroden d_{S1} der Steuerfunkentstrecke S_1 zwischen 3.3 — 6.2 mm liegt. Wird der Wert von R_3 weiter gesteigert, sinkt der höchste Wert d_{S1} und bei ungefähr 10 Megohm schrumpft

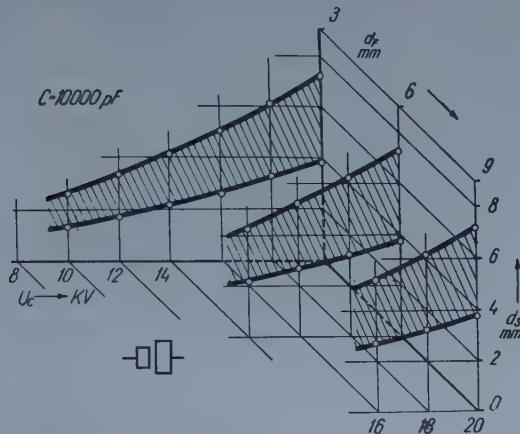


Abb. 8. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand d_{S1} der Steuerfunkentstrecke, von der Ladespannung U_C und von dem Abstand der Analysenelektroden d_F . $C = 10\,000 \text{ pF}$, $R_3 = 20\,000 \text{ Ohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

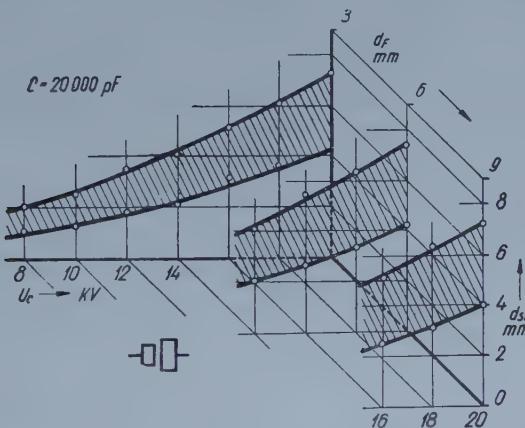


Abb. 9. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Elektrodenabstand d_{S1} der Steuerfunkentstrecke, von der Ladespannung U_C und von dem Abstand der Analysenelektroden d_F . $C = 20\,000 \text{ pF}$, $R_3 = 20\,000 \text{ Ohm}$. Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

das Wirkungsgebiet auf einen einzigen Punkt zusammen. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Schaltung gemäss Abb. 4 nur dann betriebsfähig ist, wenn durch die Thyatronröhre V_1 ein, die kleinste Stromstärke überschreitender Strom fliesst.

Für R_3 wählten wir keine 0,001 Megohm unterschreitenden Widerstände, um die Widerstände und die Thyratronröhre nicht zu überlasten. In Abb. 5 bezeichneten wir das Wirkungsgebiet Δd_{s_1} schraffiert.

Weitere Messungen bezweckten festzustellen, wie sich, bei dem mit Hilfe der Abb. 5 bestimmten Widerstandswert des R_3 bei verschiedenen Elektrodenabständen d_F der Analysenfunkenstrecke, das Wirkungsgebiet in Abhängigkeit der Ladespannung U_C und Kapazität des Kondensators C , ausbildet. Die Ergebnisse für die Werte $C = 1\,000, 5\,000, 10\,000$ und $20\,000 \text{ pF}$ Kapazität und $R_3 = 0,02 \text{ Megohm}$ stellen die Abb. 6, 7, 8 und 9 dar. In diesen Abbildungen ist auf die eine waagrechte Achse die Kondensatorspannung U_C , auf die andere der Elektrodenabstand d_F der Analysenfunkenstrecke aufgetragen. Die vertikale Achse zeigt die Elektrodenabstände d_{s_1} der Steuerfunkenstrecke. Zur Erklärung gehen wir von der Abb. 8 aus, welche die Verhältnisse für die Kapazität $C = 10\,000 \text{ pF}$ zeigt. Abb. 8 enthält drei Kurven, eine für $d_F = 3 \text{ mm}$, eine weitere für $d_F = 6 \text{ mm}$ und eine dritte für $d_F = 9 \text{ mm}$. Anfänglich sind die Kurven ganz gleich, jedoch bei grösseren Analysenfunkenstrecken-Abständen endet das Wirkungsgebiet bei höheren Spannungswerten. Im allgemeinen kann man folgendes feststellen: Bei gegebenem Analysenelektroden-Abstand d_F und mit abnehmender Ladespannung U_C des Kondensators nimmt, wie schon erwähnt, der Elektrodenabstand d_{s_1} und auch die Breite des Wirkungsgebietes ab. Sobald die Ladespannung U_C des Kondensators C soweit abfällt, dass während dem Betrieb des Systems die Funkenstrecke d_{s_1} bzw. d_F nicht durchgeschlagen werden kann, kann auch der Kondensator sich nicht mehr entladen. Es gibt also bei gegebenem Analysenfunkenstrecken-Abstand eine untere Spannungsgrenze unterhalb welcher das System unfähig ist zu arbeiten.

Aus den Abb. 6, 7, 8 und 9 geht hervor, dass der Verlauf der Kurven für jeden Kapazitätswert allgemein gleich ist. Als Unterschied ergibt sich jedoch dass das Wirkungsgebiet bei kleineren Kapazitätswerten des Kondensators C zusammenschrumpft und weiter, dass bei grösseren Analysenelektroden-Abständen d_F und kleineren Kapazitätswerten der Betrieb des Systems unmöglich wird.

Elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger mit Doppelsteuerfunkenstrecke

Die Anwendungsmöglichkeit des in Abb. 4 dargestellten Funkenerzeugers mit Einfachsteuerfunkenstrecke ist eingeschränkt, da man den Abstand d_F der Analysenfunkenstrecke F nicht unabhängig von der Ladespannung U_C des Kondensators C einstellen kann. Der kleinste Elektrodenabstand d_F der Analysenfunkenstrecke F kann nur so gewählt werden, dass bei der an den Klemmen des Widerstandes R_2 herrschenden Spannung kein Funke durchschlägt. Wie aus den Abb. 6, 7, 8 und 9 ersichtlich ist, hat dieser Umstand bis 20 000 Volt Ladespannung des Kondensators C und bei gewöhnlich verwendeten Analysenelektroden-Abständen keine praktisch unangenehmen Folgen, es können jedoch

solche entstehen, wenn bei solchen Ladespannungen der Elektrodenabstand sehr klein ist oder wenn bei gebräuchlichen Elektrodenabständen höhere Spannungen vorliegen.

Diesen Nachteil kann man in der Weise vermeiden, dass man anstelle der Einfachsteuerfunkentstrecke S_1 der Abb. 4 eine Doppelsteuerfunkentstrecke S_2 , wie in Abb. 10, verwendet, wodurch im Stromkreis mit der Analysenfunkent-

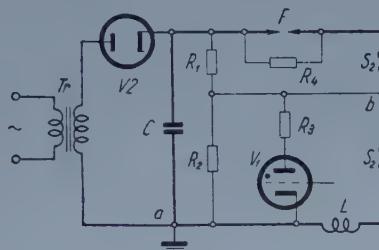


Abb. 10. Schaltungsschema des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkentstrecke. C — Kondensator. F — Analysenfunkentstrecke. L — Selbstinduktionsspule. R_1 , R_2 — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände. R_3 , R_4 — ohmsche Widerstände. S_2 — Doppelsteuerfunkentstrecke. Tr — Hochspannungs-Transformator. V_1 — Thyatronröhre. V_2 — Gleichrichterdiode. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

strecke zusammen drei Funkenstrecken vorliegen. Die Einschaltung der dritten Funkenstrecke hat zur Folge, dass gleichzeitig auch ein ohmscher Widerstand R_4 zur Überbrückung der Analysenfunkentstrecke F eingeschaltet werden muss. Bei dieser Schaltung sind die beiden Hälften der Doppelsteuerfunkentstrecke S_2 geometrisch gleich. Die ohmschen Widerstände R_1 und R_2 verteilen die Ladespannung des Kondensators C gleichmäßig an die beiden Hälften der Steuerfunkentstrecke S_2 trotz Einschaltung des ohmschen Widerstandes R_4 , da dessen Wert neben R_1 und R_2 vernachlässigbar ist.

Wird in der Schaltung gemäss Abb. 10 die Analysenfunkentstrecke F kurzgeschlossen, entsteht die Schaltung der Abb. 4. Bei geöffneter Analysenfunkentstrecke F ist die Wirkungsweise des Schaltsystems folgende: Wenn wir auf das Gitter der übrigens durch negative Vorspannung gesperrten Thyatronröhre V_1 einen positiven Spannungsstoß geben, zündet die Röhre und Punkt »b« der Schaltung gerät auf das Potential des Punktes »a«. Da vorher der Abstand der Doppelsteuerfunkentstrecke S_2 so eingestellt war, dass bei gegebener Spannung eben kein Durchschlag erfolgt, entsteht auf der oberen Hälfte von S_2 annähernd die doppelte Spannung, demzufolge die obere Hälfte von S_2 durchschlagen wird. Nach dem Durchschlag fängt der Kondensator C an, sich über R_4 — obere Hälfte von S_2 — R_3 zu entladen. Hiernach zeigt sich die Ladespannung des Kondensators an den Klemmen der Widerstände R_3 und R_4 . Wenn die Widerstände R_3 und R_4 voneinander wesentlich abweichen, wird

vorerst diejenige Funkenstrecke durchschlagen, welche von grösserem Widerstand überbrückt ist. Wenn der Widerstand R_4 grösser ist als R_3 , wird nach dem Durchschlagen der oberen Hälfte der Steuerfunkenstrecke S_2 erst die Analysenfunkenstrecke F durchschlagen. Nach dem Durchschlagen der Analysenfunkenstrecke F ist der Entladungsweg des Kondensators F — obere Hälfte von S_2 — R_3 . In diesem Fall erscheint die ganze Ladespannung des Kondensators C bei R_3 , demzufolge auch die untere Hälfte der Steuerfunkenstrecke S_2 durchschlagen wird. Nach diesem Verlauf entlädt sich der Kondensator über $L — S_2 — F$. Ist R_3 wesentlich grösser als R_4 , wird der Durchschlag des unteren Teiles von S_2 früher eintreten als der Durchschlag bei F . Den Fall $R_3 = R_4$ werden wir später besprechen.

*Charakteristische Eigenschaften des elektronisch gesteuerten
Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke*

Die ersten Untersuchungen bezweckten die optimalen Werte für die Widerstände R_3 und R_4 festzulegen. Abb. 11 und 12 stellen die Messergebnisse dar. Es ist aus diesen Abbildungen ersichtlich, wie sich bei Analysenelektroden-

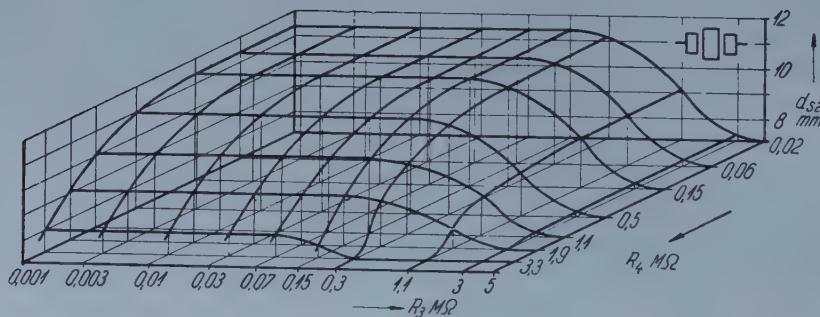


Abb. 11. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke. d_{S2} — Elektrodenabstand der Steuerfunkenstrecke. R_3 und R_4 — ohmsche Widerstände. d_F — 3 mm, $U_C = 18000$ Volt, $C = 10000$ pF, Funkenhäufigkeit 50/s.

Abstände $d_F = 3$ mm und $d_F = 6$ mm und verschiedenen R_3 und R_4 Werten d_{S2} bzw. Δd_{S2} ändert. Wenn wir von Elektrodenabständen der Doppelsteuerfunkenstrecke sprechen, ist immer die Summe der beiden halben Funkenstrecken zu verstehen.

Auf die beiden waagrechten Achsen der Abb. 11 sind die R_3 bzw. R_4 Werte im logarithmischen Massstab, auf der senkrechten Achse d_{S2} d. h. der Gesamt-

abstand der Elektroden der Doppelsteuerfunkentstrecke aufgetragen. Bei den Messungen waren $C = 10\,000 \text{ pF}$, $U_C = 18\,000 \text{ Volt}$, $d_F = 3 \text{ mm}$. Aus der Abb. ergibt sich, dass R_3 und R_4 nie einen bestimmten Höchstwert überschreiten dürfen, damit Δd_{S2} gross, d. h. das Wirkungsgebiet breit sei. Weiterhin zeigt die Abb. dass wenn der Wert von R_3 zwischen 0,001 und 0,15 Megohm, der Wert

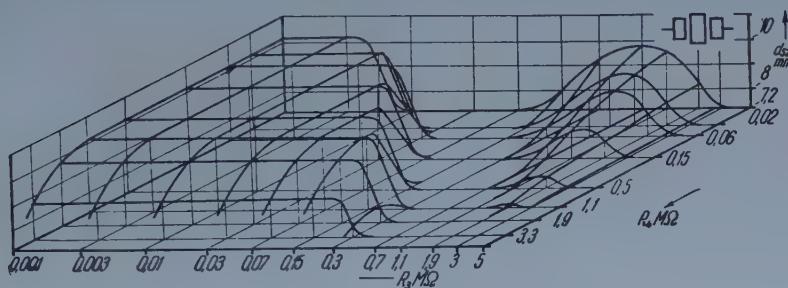


Abb. 12. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkentstrecke. d_{S2} — Elektrodenabstand der Steuerfunkentstrecke. R_3 und R_4 — ohmsche Widerstände. d_F — 6 mm, U_C — 18 000 Volt, C — 10 000 pF, Funkenhäufigkeit 50/s.

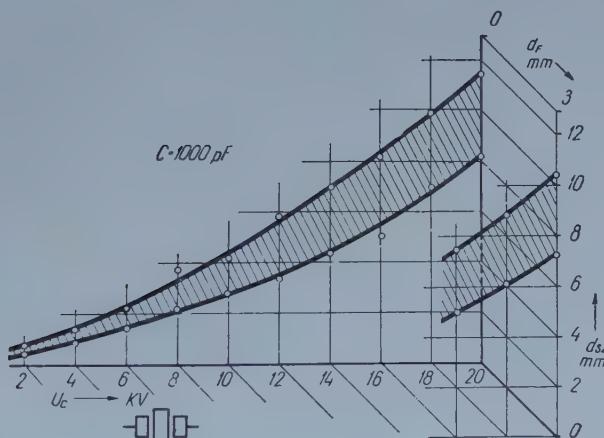


Abb. 13. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand d_{S2} , von der Ladespannung U_C und dem Analysen elektrodenabstand d_F . $C = 1\,000 \text{ pF}$, $R_3 = 0\cdot02 \text{ Megohm}$, $R_4 = 0\cdot5 \text{ Megohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

von R_4 zwischen 0,02 und 0,15 Megohm liegt, die Fläche eine Hochebene hat, wo das Wirkungsgebiet am breitesten ist. Hier ändert sich der Wert von d_{S2} von 7,2 bis 12,0 mm. Ausserhalb dieses, mit Hochebene bedeckten Gebietes nimmt Δd_{S2} ab.

Wenn man unter Beibehaltung obiger Versuchsverhältnisse den Abstand d_F der Analysenfunkentstrecke von 3 mm auf 6 mm erhöht, gelangt man zu

den in Abb. 12 dargestellten Verhältnissen. Das erste, was man aus der Abb. entnehmen kann ist, dass bei $d_F = 6$ mm das breiteste Wirkungsgebiet zwischen den Werten von $d_{S2} = 7.2 - 10.2$ mm liegt. Der Höchstwert von d_{S2} war, bei $d_F = 3$ mm, 12 mm. Als zweites ist auffallend, dass sich in der Fläche eine Mulde bildet, innerhalb welcher sich das Wirkungsgebiet soweit verengt, dass das System betriebsunfähig wird. Die Ausbildung dieser Mulde kann folgenderweise erklärt werden.

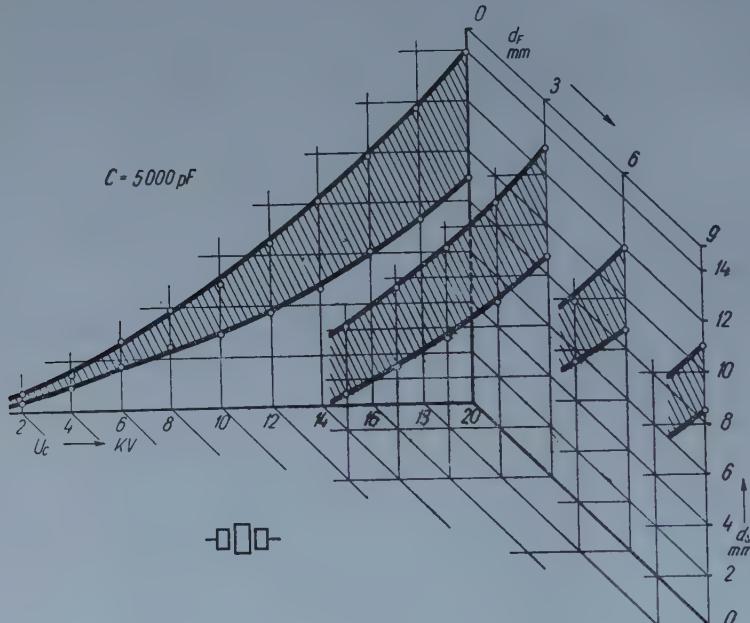


Abb. 14. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkentstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand d_{S2} , von der Ladespannung U_C und dem Analysen-elektrodenabstand d_F . $C = 5000 \text{ pF}$, $R_3 = 0.02 \text{ Megohm}$, $R_4 = 0.5 \text{ Megohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Wir erwähnten schon früher, dass, wenn beim Betrieb nach dem Schaltungsschema der Abb. 10 die obere Hälfte der Steuerfunkentstrecke S_2 durchschlägt, die Spannung U_C des Kondensators sich an den Widerständen R_3 und R_4 verteilt. Aus Abb. 12 ist ersichtlich, dass der Minimalwert von $d_{S2} = 7.2$ mm ist und auf die untere Hälfte der Doppelfunkentstrecke S_2 , 3.6 mm entfällt. Da der Abstand der Analysenfunkentstrecke $d_F = 6$ mm ist, kann die Ladespannung $U_C = 18000$ Volt des Kondensators C unter gegebenen Verhältnissen den Abstand $6 + 3.6 = 9.6$ mm nicht durchschlagen, wenn die Widerstände R_3 und R_4 , die Spannung U_C auf die beiden Funkentstrecken annähernd gleichmäßig verteilen. Die Mulde in Abb. 12 ist in der Nähe derjenigen Widerstandswerte, bei denen R_3 und R_4 annähernd gleich sind. Damit nach dem Durchschlagen der oberen Hälfte der Steuerfunkentstrecke S_2 , die untere Hälfte und

auch die Analysenfunkenstrecke F durchschlage, müssen die Widerstandswerte von R_3 und R_4 wesentlich verschieden sein. Ist R_4 grösser als R_3 , gelangen wir auf der Abb. 12 in das links von der Mulde gelegene Gebiet, im entgegengesetzten Fall in das rechte. Im Gebiete links von der Mulde haben wir eine Hochebene beträchtlicher Ausdehnung, unter welcher sich das günstige Wirkungsgebiet ausbreitet.

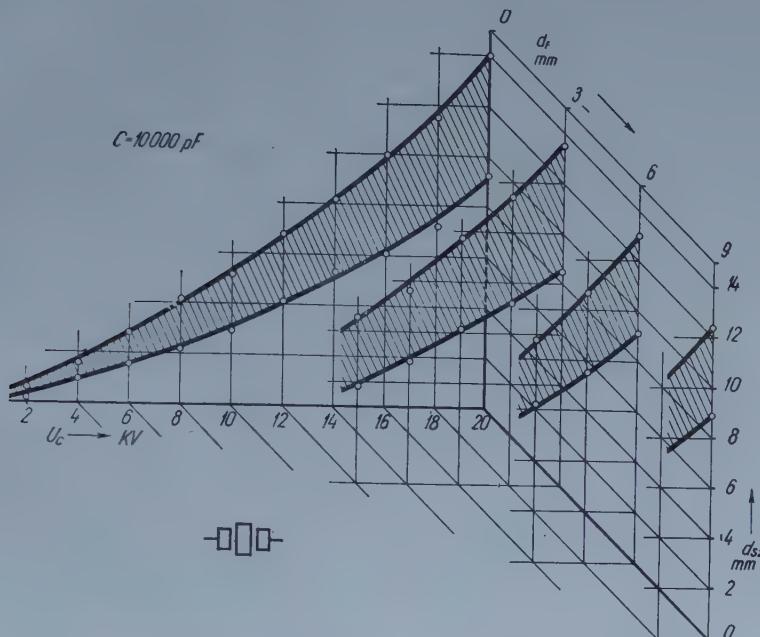


Abb. 15. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerfunkenstrecke in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand d_{s2} , von der Ladespannung U_c und dem Analysenelektrodenabstand d_f . $C = 10\,000 \mu\text{F}$, $R_3 = 0\cdot02$ Megohm, $R_4 = 0\cdot5$ Megohm, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

Nach dem die optimalen Werte von R_3 und R_4 bekannt waren, untersuchten wir bei verschiedenen Analysenelektrodenabständen d_f die Ausbildung der Elektrodenabstände d_{s2} der Steuerelektronenstrecke und mit diesen das richtige Wirkungsgebiet in Abhängigkeit von der Ladespannung U_c und der Kapazität des Kondensators C . Die Messungen führten wir bei $R_3 = 0\cdot02$ Megohm, $R_4 = 0\cdot5$ Megohm, $C = 1000, 5\,000, 10\,000$ und $20\,000 \mu\text{F}$ durch. Die Ergebnisse sind in den Abb. 13, 14, 15 und 16 dargestellt.

In sämtlichen Abbildungen beziehen sich die Kurven $d_f = 0$ auf kurzgeschlossene Analysenfunkenstrecke. Es ist zu bemerken, dass der Betrieb bei entsprechend kleinen Steuerelektrodenabständen noch bei 2 000 Volt möglich ist. Diese Tatsache ist bei den Zündfunken liefernden elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern von Bedeutung. Bei auf $d_f = 3$ mm geöffneter Analysen-

funkenstrecke hört, laut Abb. 13, 14 und 15, der Betrieb bei ungefähr 12 kV auf, in der Abb. 16 schon bei 16 kV. Das Wirkungsgebiet nimmt bei $d_F = 6$ bzw. 9 mm noch weiter ab. Je kleiner die C-Werte sind, umso grösser muss die Spannung sein, um den Betrieb des Systems aufrecht erhalten zu können. Im Falle einer Kapazität $C = 1000 \text{ pF}$ und $d_F = 6$ und 9 mm, besteht überhaupt keine Betriebsmöglichkeit. Mit abnehmenden Kapazitätswerten wird das Wirkungs-

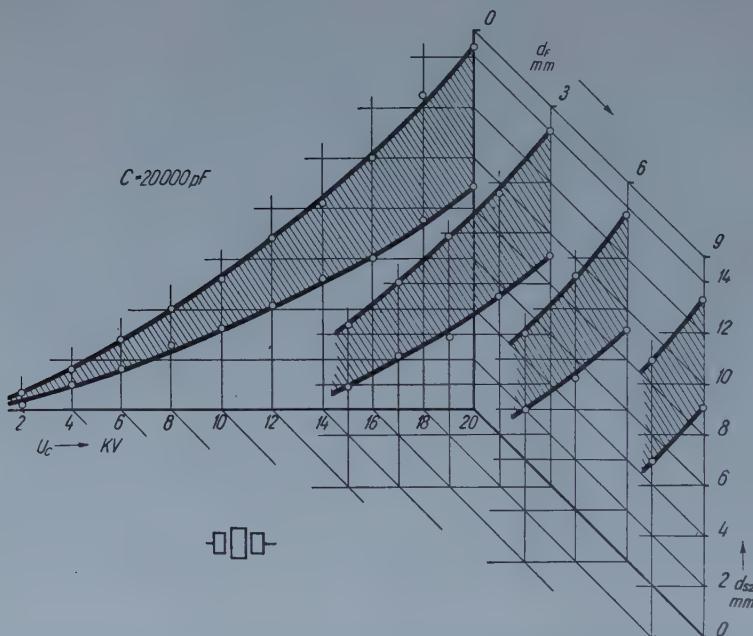


Abb. 16. Wirkungsgebiet des Funkenerzeugers mit Doppelsteuerelektronenfunkentstörung in Abhängigkeit von dem Steuerelektrodenabstand d_{s2} , von der Ladespannung U_C und dem Analysenelektrodenabstand d_F . $C = 20000 \text{ pF}$, $R_3 = 0.02 \text{ Megohm}$, $R_4 = 0.5 \text{ Megohm}$, Funkenhäufigkeit 50/s. Die Wirkungsgebiete sind gestrichelt.

gebiet schmäler und verschiebt sich in der Richtung kleinerer Analysenelektrodenabstände.

*Pro Sekunde 100 Funken liefernder elektronisch
gesteuerter Funkenerzeuger*

Die in den Abb. 4 und 10 dargestellten Funkenerzeuger können bei Anschaltung an ein 50 Perioden-Netz nur 50 Funken pro Sekunde liefern. Mit Hilfe der Schaltung in Abb. 17 kann man 100 Funken pro Sekunde erzeugen. In dieser Schaltung ist der vom Kondensator C rechts liegende Teil identisch mit dem entsprechenden Teil der Abb. 4. Der Unterschied zwischen beiden ist

der, dass hier in Graetz-Schaltung Doppelweggleichrichtung erreicht wird. Wenn der positive Spannungsstoß, welcher das Gitter der Thyatronröhre V_1 steuert, so erfolgt, dass der Funke stets beim Nullwert der Transformatorschaltspannung entsteht, können regelmässige Funkenfolgen erzeugt werden. Solche Entladungsverhältnisse zeigt das Oszillogramm der Abb. 21.

Bei der 100 Funken pro Sekunde liefernden Anordnung (Abb. 17) ist die Zeit zur Entionisierung der Steuerfunkentstrecke S_1 viel kleiner als im Falle von 50 Funken pro Sekunde. Bei den hier verwendeten Kapazitäts- und Spannungswerten und einer Entlandungshäufigkeit von 50 Funken pro Sekunde ist die Entionisierung der Steuerfunkentstrecke S_1 immer genügend, dies wird aber nicht der Fall sein, wenn bei grösseren Spannungs- und Kapazitätswerten die Häufigkeit auf 100 Funken pro Sekunde ansteigt. Die Verhältnisse gestalten

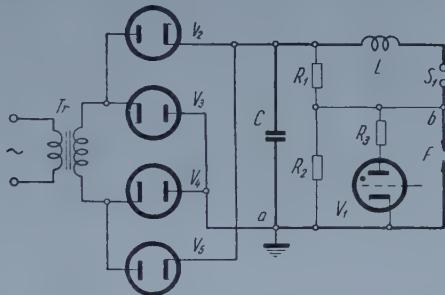


Abb. 17. Schaltungsschema des 100 Funken pro Sekunde liefernden elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers. C — Kondensator. F — Analysenfunkenstrecke. L — Selbstinduktionsspule. R_1 , R_2 — Spannungssteiler ohmsche Widerstände. R_3 — ohmscher Widerstand. S_1 — Einfachsteuerfunkenstrecke. Tr — Hochspannungstransformator. V_1 — Thyatronröhre. V_2 , V_3 , V_4 — Gleichrichterdioden. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

sich nicht günstiger, wenn die Elektroden der Steuerfunkentstrecke nicht scheibenförmig sind, sondern aus 5—10 mm starken Stäben verfertigt werden. Den Betrieb eines solchen Funkenerzeugers kann man so aufrechterhalten, dass in die Steuerfunkentstrecke S_1 Luft eingeblasen wird.

Zündfunken liefernder elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger

Der kondensierte Hochspannungsfunk ist zu quantitativen Analysen sehr gut brauchbar, nachteilig ist jedoch die geringere Empfindlichkeit derselben. Um grössere Empfindlichkeit zu erreichen, wird zur Anregung der Abreissbogen oder kondensierte Niederspannungsfunk verwendet. Bei derartigen Lichtquellen wird die Bogen- bzw. Funkenentladung durch einen kondensierten Hochspannungsfunk kleiner Energie eingeleitet, und bei dieser Verwendung übertrifft der neue elektronisch gesteuerte Funkenerzeuger sämtliche anderen Einrichtungen.

Ein zur Zündung von Abreißbögen und kondensierten Niederspannungsfunkens verwendbarer elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger ist in Abb. 18 dargestellt. Hier sind Tr , V_2 , V_3 , C_1 und C_2 die üblichen Schaltelemente eines Spannungsverdopplers. Der eigentliche Arbeitskondensator ist C_3 und erhält seine Ladung von C_1 und C_2 über den ohmschen Widerstand R_4 . Der übrige Teil des Schaltungsschemas ist mit den früheren identisch, nur ist im Entladungskreise noch die primäre Windung des Tesla Transformators A eingebaut. Die im Stromkreis C_3-S_2-A entstehenden Hochfrequenzentladungen werden im Tesla Autotransformator A transformiert und liefern die Zündfunkens.

Bei Zündfunkenerzeugern ist die Gleichstromspeisung von ausgesprochenem Vorteil. Würde nämlich der Kondensator C_3 der Abb. 18 besonders zur

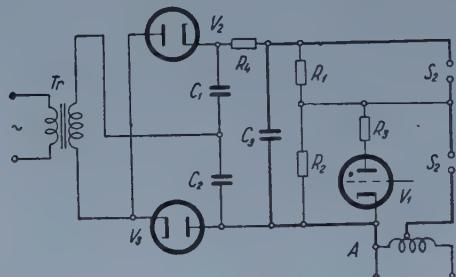


Abb. 18. Schaltungsschema des Zündfunken liefernden Funkenerzeugers. A — Tesla Autotransformator. C_1 , C_2 , C_3 — Kondensatoren. R_1 , R_2 — Spannungsteiler, ohmsche Widerstände. R_3 , R_4 — ohmsche Widerstände. S_2 — Doppelsteuerfunkentstrecke. Tr — Hochspannungstransformator. V_1 — Thyatronröhre. V_2 , V_3 — Gleichrichterdioden. Der dick gezeichnete Teil ist der Entladekreis.

Zündung der kondensierten Niederspannungsfunktion, mit Wechselstrom gespeist, so würde der Zeitpunkt der höchsten Ladespannung des Niederspannungskondensators und des Kondensators C_3 nicht zusammenfallen. Analysenfunktionen und Zündfunktionen höchsten Nutzeffektes entstehen aber gerade dann, wenn die Ladespannung des Kondensators ihren Scheitelwert erreicht. Bei der Speisung des Kondensators mit Wechselstrom ist eben das Zusammenbringen der beiden Phasenlagen schwierig, wenn hingegen der Kondensator C_3 mit Gleichstrom aufgeladen wird, kann die Zündung in der gewünschten Phasenstellung erfolgen, da die Einstellung der Phase des positiven Spannungsstosses, welcher das Gitter der Thyratronröhre V_1 steuert, leicht gelingt.

Auftreten von Überspannungen

Der hier beschriebene Funkenerzeuger ist im wahren Sinne des Wortes ein absolut sicher arbeitender Apparat, welcher, nachdem der Elektrodenabstand der Steuerfunkentstrecke zur speisenden Spannung richtig angepasst ist,

ohne jede Störung uner dlich lange Zeit regelmässig im Betrieb gehalten werden kann. Dies ist wahrscheinlich dem Umstand zu verdanken, dass bei der Zündung der Funkenstrecken beträchtliche Überspannungen auftreten und diese zum grossen Teil zum Erfolgen der sicheren Zündung beitragen.

Ähnliche Überspannungen beobachtete *Kaiser* [29] beim Feussner'schen Funkenerzeuger. Unser Funkenerzeuger zeigt hinsichtlich der Steuerfunkenstrecken grosse Ähnlichkeit mit dem Feussner'schen, besonders bei Anwendung der Doppelsteuerfunkenstrecke, da in diesem Falle ebenso drei Funkenstrecke

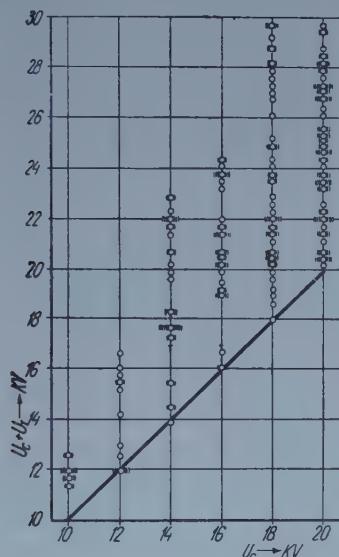


Abb. 19. Überspannungen im elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger. $C = 5\,000 \text{ pF}$, U_C = die Ladespannung des Kondensators C , U_T = Überspannung.

hintereinander geschaltet sind wie beim Feussner'schen Funkenerzeuger. Die Überspannungen schreibt Kaiser den an den Steuerfunkenstrecken beim Schaltungsverlauf entstehenden Wanderwellen zu.

Zur Messung der Überspannungen schalteten wir, parallel zur Doppelsteuerfunkenstrecke, ein Kugelpaar von 50 mm Durchmesser ein. Bei gegebener Einstellung und Betrieb des Funkenerzeugers näherten wir die Kugeln einander so lange, bis zwischen ihnen ein Durchschlag erfolgte. Aus der Entfernung der Kugeln bestimmten wir dann die Durchschlagsspannung.

Die Ergebnisse der Überspannungsmessungen geben wir in Abb. 19. Auf die waagrechte Achse ist die Ladespannung U_C des Kondensators C aufgetragen, auf die senkrechte Achse die an der Kugelfunkenstrecke gemessene Gesamtspannung. Letzterer Wert enthält die Ladespannung U_C und die Überspannung U_T . Die Entfernung der Punkte oberhalb der unter 45° gezogenen Geraden,

senkrecht von den Geraden gemessen, ist die Überspannung U_T . Die Messungen haben wir bei einer Kapazität von $C = 5\,000 \text{ pF}$ durchgeführt.

Die in der Abb. 19 eingezeichneten übereinander liegenden Punkte wurden bei konstanten Ladespannung U_C und verschiedenen Abstand d_{S2} der Elektroden der Steuerfunkentstrecke aufgenommen. Die Messergebnisse zeigen, dass je grösser der Elektrodenabstand der Steuerfunkentstrecke ist, umso grösser wird auch die beobachtete Überspannung. Bei den kleinsten zulässigen Steuerelektrodenabständen bei denen der Betrieb noch aufrecht erhalten werden kann, gibt es keine Überspannung oder aber ist diese sehr gering. Da wir im allgemeinen in der Mitte des durch den obersten und untersten Elektrodenabstand d_{S2} der Steuerfunkentstrecke bestimmten Wirkungsgebiet arbeiten, können wir ständig mit dem Auftreten von ungefähr 25%-igen Überspannungen rechnen. Die Untersuchungen bewiesen, dass das Auftreten von Überspannungen von dem Abstand d_F der Analysenfunkentstrecke unabhängig ist.

Veranschaulichung der Wirkungsweise des elektronisch gesteuerten Funkenerzeugers

Um den Betrieb des beschriebenen Funkenerzeugers zu veranschaulichen, geben wir in den Abb. 20, 21 und 22 einige Oszillogramme. Die Oszillogramme der Abb. 20 zeigen den Verlauf der Klemmspannung des Kondensators der Abb. 4 bei der Kapazität $C = 10\,000 \text{ pF}$, Ladespannung $U_C = 18\,000 \text{ Volt}$ und verschiedenen Funkenhäufigkeiten. Die Oszillogramme sind mit einem Siemens'schen Schleifenoszillographen aufgenommen. Die Abb. 20b — 20f geben den Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators, wenn das Gitter der Thyatronröhre V_1 der Abb. 4. mit positiven Spannungsstössen verschiedener Häufigkeit gesteuert wurde. Die Häufigkeit der Funken pro Sekunde ist in Abb. 20a, 50, in Abb. 20b $1/2 \times 50$, in Abb. 20c $1/3 \times 50$, in Abb. 20d $1/5 \times 50$, in Abb. 20e $1/8 \times 50$, und in Abb. 20f $1/16 \times 50$. Die kleinen Unregelmässigkeiten der Oszillogramme der Abb. 20. sind der Selbstschwingung der Oszillographenschleife zuzuschreiben.

Das in der Abb. 21. gegebene Oszillogramm wurde bei der Schaltung der Abb. 17. aufgenommen und zeigt ebenfalls den Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C. Die weiteren Betriebsangaben sind: $C = 10\,000 \text{ pF}$, $U_C = 18\,000 \text{ Volt}$, Funkenhäufigkeit 100/s. Hier erfolgte also die Steuerung des Gitters der Thyatronröhre V_1 der Abb. 17 pro Sekunde durch 100 positive Spannungsstösse.

Die Abbildungsgruppe 22 zeigt, wie es möglich ist, mit den nach Schaltung der Abb. 18 erzeugten Zündfunken, einen Abreissbogen-Betrieb aufrecht zu erhalten. Bei diesen Aufnahmen war der Tesla Transformator A der Abb. 18 an einen mit Wechselstrom gespeisten Bogenstromkreis angeschlossen. Das Gitter

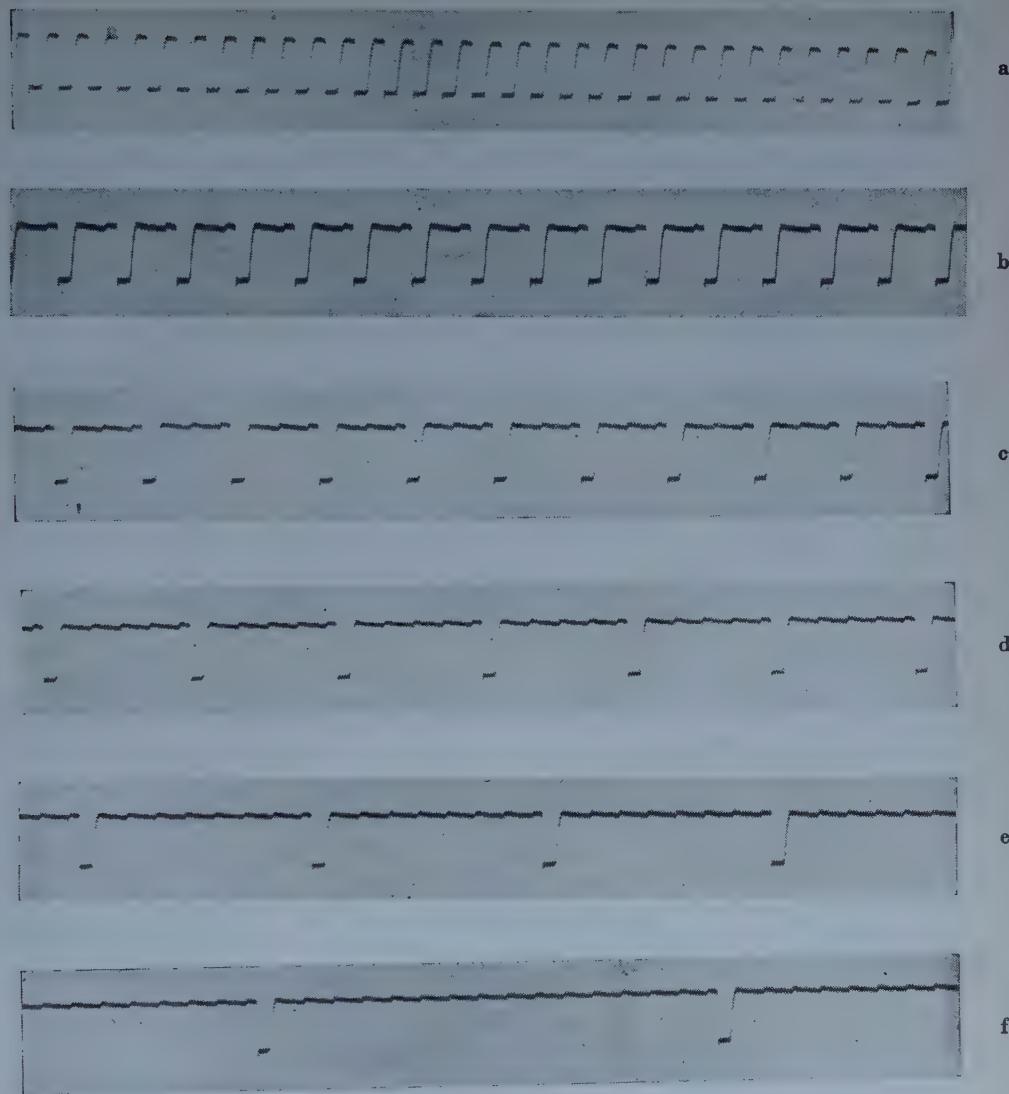


Abb. 20. Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators der Abb. 4 bei verschiedenen Funkenhäufigkeiten. Mit einem Schleifenoszillographen hergestellte Oszillogramme. C = 10 000 pF, U = 18 000 Volt. Die Funkenhäufigkeit pro Sekunde: im Bilde »a« 50, im Bilde »b« $\frac{1}{2} \times 50$, im Bilde »c« $\frac{1}{3} \times 50$, im Bilde »d« $\frac{1}{5} \times 50$, im Bilde »e« $\frac{1}{8} \times 50$, im Bilde »f« $\frac{1}{16} \times 50$.



Abb. 21. Verlauf der Spannung an den Klemmen des Kondensators C der Abb. 17. C = 10 000 pF, Uc = 18 000 Volt. Funkenhäufigkeit 100/s.

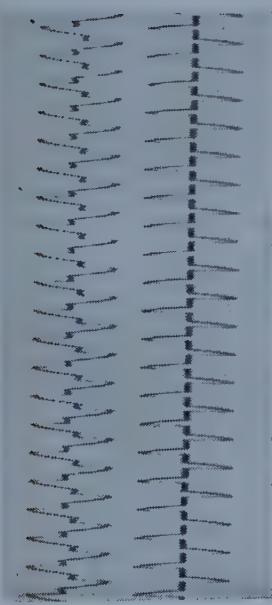
der Thyratronröhre V_1 der Abb. 18 wurde im gewünschten Tempo mit positiven Spannungsstößen durch einen Impulsgenerator gesteuert. In sämtlichen Bildern der Abb. 22 zeigt das obere Oszillogramm den Verlauf der Spannung an den Elektroden der Analysenfunkenstrecke, das untere ist die Stromkurve. In sämtlichen Bildern ist bei den oberen Kurven die Sinus-Grundkurve die Spannungskurve des 50-Perioden Wechselstromnetzes. Die Aufnahmen wurden mit einem Schleifenoszillographen gemacht.

Abb. 22a zeigt den Fall, wenn in jeder Halbperiode der Wechselspannung ein Bogen entsteht. In der Abb. 22d entsteht der Bogen in jeder zweiten Halbperiode, hier haben wir einen gleichgerichteten Bogen. In der Abb. 22b entsteht der Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, darauf folgt eine 4 Perioden lange Pause. In der Abb. 22e gibt es in jeder fünften Periode einen Bogen (gleichgerichtet), usw.

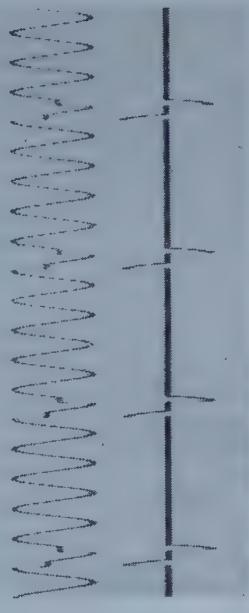
ALLGEMEINE BEMERKUNGEN

Die wissenschaftliche wie auch die praktische Spektroskopie ist in vielen Fällen bei der Funken- oder Bogenanregung wesentlichen Einschränkungen unterworfen, da die Häufigkeit der Funken bzw. Bögen pro Sekunde durch die Periodenzahl des Netzes gegeben ist. Demzufolge können, abgesehen von wenigen Ausnahmen, beinahe alle Hoch- und Niederspannungs-Funkenerzeuger und Bogenerzeuger nur der Periodenzahl des Netzes entsprechend 100 oder 50 Funken bzw. Bögen pro Sekunde liefern. Die Folge dieser Einschränkung ist in vielen Fällen, dass die Anregung nicht den besten Anregungsverhältnissen entspricht, sondern die Anregungsverhältnisse müssen der erlaubten Erwärmung angepasst werden. In Bezug auf die Erwärmung sind kleinere Funken- bzw. Bogenhäufigkeiten erwünscht. Anderseits weisen die spektrochemischen Forschungen dahin, dass in vielen Fällen noch grössere Funkenhäufigkeiten erwünscht sind als die auf gebräuchliche Weise erreichbare Häufigkeit von 100 pro Sekunde, da auf diese Weise die Analysengenauigkeit ansteigt. Vom Standpunkte der Analysengenauigkeit sind also in einigen Fällen grössere Funkenhäufigkeiten erwünscht.

Um diesen beiden Anforderungen der praktischen Spektralanalyse Genüge zu leisten, wurden verschiedene Geräte eingeführt. Bei der Anwendung von Abreissbogen wird die schädliche Erwärmung in der Weise verhindert, dass zwischen zwei Brennperioden kürzere oder längere Pausen eingeschaltet werden. Dieses Intermittieren wird meistens durch in den Zündstromkreis, oder in den Bogenstromkreis, oder in beide eingebauten Drehschalter erreicht. Abgesehen von einigen ganz aussergewöhnlichen Fällen, ist diese Anordnung nicht ganz befriedigend, da bei sehr kurzer Brenndauer die Wiederholbarkeit lückenhaft werden kann. Diese Aufgabe kann mit dem elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger sehr einfach und vollkommen durch Steuerung des Gitters der



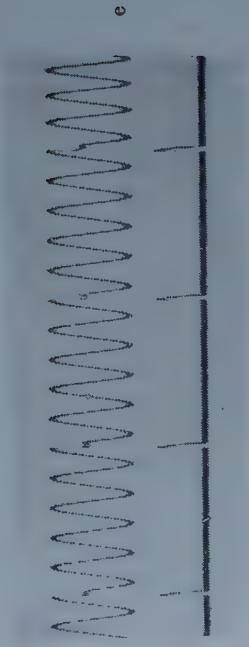
a



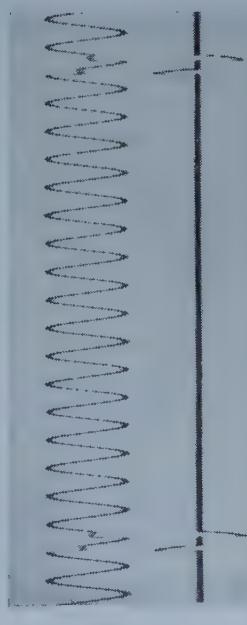
b



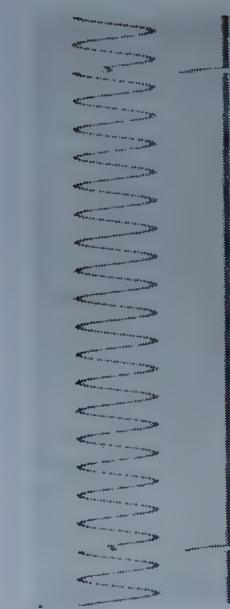
d



e



c



f

Abb. 22. Steuerung eines Abreissbogens mit Hilfe der Schaltung der Abb. 18. Die oberen Kurven sind die Spannungskurven, die unteren die Stromkurven. In den oberen Kurven ist die Sinusgrundkurve die Spannungskurve des Wechselstromnetzes. Bild »a« : Bogen in jeder Halbperiode. Bild »b« : Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, nachher 4 Perioden lange Pause. Bild »c« : Bogen in zwei nacheinander folgenden Halbperioden, nachher 16 Perioden lange Pause. Bild »d« : Bogen in jeder zweiten Halbperiode (gleichgerichtet). Bild »e« : Bogen in jeder fünften Periode (gleichgerichtet). Bild »f« : Bogen in jeder zweiten Halbperiode (gleichgerichtet).

Thyatronröhre V₁ der Abb. 18 erfüllt und auf diese Weise die Häufigkeit der Entladung, weitgehend verändert werden. Man kann also mit dieser Einrichtung die Anregungsenergie beliebig einstellen und somit durch Verminderung der Bogen- bzw. Funkenzahl pro Zeiteinheit die übermässige Erwärmung vermeiden.

Zur Zeit werden Funken grösserer Häufigkeit als 100 pro Sekunde so erzeugt, dass durch entsprechende Einstellung der Spannung und der Steuerfunkentstrecke je Halbperiode mehr als ein Funken entstehen [45, 53, 56]. Als Grund der so erreichten besseren Analysenergebnisse wird angenommen, dass infolge der grösseren Funkenhäufigkeit in der Funkenstrecke verbleibende Ionen die Feldstärke verändern, und darum die Funken nicht zwischen ausgezeichneten Punkten der Elektroden überspringen, sondern die Oberfläche der Elektroden unabhängig von deren Form in gewissem Grade gleichmässig bearbeiten [45]. Wenn diese Annahme richtig ist, müsste die Funkenpause beim Übergang von einer Halbperiode in die andere ungünstig sein und ein ununterbrochenes Funken erwünscht sein. Mit dem elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger ist auch diese Aufgabe ohne weiteres erfüllbar, mit Gleichstromspeisung und Steuerung des Gitters der Thyatronröhre (Abb. 18) mit einer 100 pro Sekunde übersteigender Zahl von positiven Spannungsstössen.

Wenn man die älteren, mit fester Steuerfunkentstrecke und die durch Synchronschalter gesteuerten mit den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern vergleicht, ergibt sich folgendes. Bei den mit festen Funkenstrecken gesteuerten Funkenerzeugern ist die Einstellung des Elektrodenabstandes der Steuerfunkentstrecke heikel und eine Abnutzung derselben kann die Anregungsverhältnisse verändern. Prinzipiell wäre die Steuerung mit dem synchron Drehschalter vollkommen durchführbar, dessen Nachteil ist aber — wie im historischer Überblick schon besprochen wurde — dass infolge der ständig wechselen Abstände der Steuerfunkentstrecke die Verteilung der Funkenenergie zwischen der Analysen- und Steuerfunkentstrecke sich ständig ändert. Bei den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern ist eine kleine Änderung im Abstand der Elektroden der Steuerfunkentstrecke ohne Belang, da innerhalb eines Gebietes von einigen mm die Arbeitsverhältnisse annähernd identisch bleiben. Ausserdem, da die Steuerfunkentstrecke feststehend ist, wird die Verteilung der Entladungsenergie zwischen der Steuerfunkentstrecke und Analysenfunkentstrecke in konstantem Verhältniss bleiben.

Laut der bisher Besprochenen sind bei den elektronisch gesteuerten Funkenerzeugern alle Vorteile der früheren Steuersysteme bei Beseitigung von deren Nachteilen, aufrecht erhalten.

Schliesslich seien noch die mit Einfach- und Doppelsteuerfunkentstrecke arbeitenden elektronisch gesteuerten Funkenerzeuger verglichen.

Wenn man die charakteristischen Kurven (Abb. 6, 7, 8 und 9) der Einfachsteuerfunkentstrecken-Schaltung (Abb. 4) mit den charakteristischen Kurven (Abb. 13, 14, 15 und 16) der Doppelsteuerfunkentstrecken-Schaltung (Abb. 10)

vergleicht, kann man feststellen, dass das Wirkungsgebiet des Doppelsteuer-funkenstrecken-Systems bei einem Abstand $d_F = 3$ mm der Analysenfunkenstrecke grösser ist als bei der Einfachsteuerfunkenstrecke. Bei grösserem Elektrodenabstand ist das Wirkungsgebiet der beiden Systeme im allgemeinen gleich. Bei Einfachsteuerfunkenstrecke ist die mittlere Länge d_{S1} der Steuerfunken aber ungefähr nur die Hälfte der Länge der Doppelsteuerfunkten.

Nachteilig für das Einfachsteuerfunkenstrecken-System ist, dass der Abstand der Analysenfunkenstrecke F von der Ladespannung U_C des Kondensators C nicht unabhängig ist. Praktisch ist, in beiden Fällen, die Länge der Steuerfunkenstrecken von der Länge der Analysenfunkenstrecke unabhängig.

* * *

Für den Beitrag bei der Entwicklung des elektronisch gesteuerten Funken-erzeugers danke ich Herrn *Á. Klásmányi*. Dank gebührt den Mitarbeitern Herrn *K. Berta*, *A. Boronkay*, *S. Éder*, *F. Mancz* und *Z. Sibalszky* für ihre Teilnahme an den Versuchen und der Durchführung der Messungen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. *G. Scheibe* und *A. Neuhäuser*, Angew. Chem. **41**, 1218, 1928.
2. *H. Lundegardh*, Die quantitative Spektralanalyse der Elemente. I. Gustav Fischer, Jena, 1929.
3. *W. Gerlach*, und *W. Gerlach*, Die chemische Emissionsspektralanalyse. Leopold Voss, Leipzig, 1930.
4. *H. Boas*, Z. Phys. **60**, 690, 1930.
5. *F. Twyman*, und *D. M. Smith*, Wavelength tables for spectrum analysis. A. Hilger Ltd., London, 1931.
6. *O. Feussner*, Z. techn. Phys. **13**, 573, 1932.
7. *O. Feussner*, Arch. Eisenhüttenwes. **6**, 551, 1932/33.
8. *O. Feussner*, Z. Metallkunde **25**, 73, 1933.
9. *G. Scheibe*, und *A. Schöntag*, Arch. Eisenhüttenwes. **8**, 533, 1934/35.
10. *T. Kosbahn*, Ann. Phys. (5), **25**, 625, 1936.
11. *A. Schöntag*, Diss. 1936.
12. *O. Schliessmann*, und *K. Zänker*, Arch. Eisenhüttenwes **20**, 345, 1937.
13. *K. Pfeilsticker*, Z. Elektrochem. **43**, 719, 1937.
14. *H. B. Vincent*, und *R. A. Sawyer*, J. appl. Phys. **8**, 163, 1937.
15. *O. Findeisen*, Z. Metallkunde **30**, 213, 1938.
16. *F. Wolbank*, Arch. Eisenhüttenwes. **12**, 133, 1938/39.
17. *H. Kaiser*, und *A. Wallraff*, Ann. Phys. (5), **34**, 297, 1939.
18. *F. Wolbank*, Diss. 1939.
19. *F. Wolbank*, Z. Metallkunde **31**, 257, 1939.
20. *S. M. Rajskij*, J. techn. Phys. (russ.) **9**, 1719, 1939.
21. *R. A. Sawyer*, J. appl. Phys. **10**, 741, 1939.
22. *A. Henrici*, und *G. Scheibe*, Chemische Spektralanalyse. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1939.
23. *W. Zehden*, J. Soc. Chem. Ind. **59**, 236, 1940.
24. *F. Twyman*, *F. W. Zehden*, und *E. S. Dreblow*, J. Soc. Chem. Ind. **59**, 238, 1940.
25. *N. S. Sventitski*, Zavod. Lab., **8**, 470, 1940.
26. *K. Pfeilsticker*, Spectrochim. Acta **1**, 242, 1940.
27. *J. T. Mireless Malpica*, und *T. M. Berry*, Gen. Electr. Rev. **44**, 563, 1941.
28. *H. Kaiser*, Spectrochim. Acta **1**, 477, 1941.
29. *H. Kaiser*, Spectrochim. Acta **2**, 98, 1941.
30. *H. Kaiser*, und *M. Sohm*, Spectrochim. Acta **2**, 81, 1941.

31. G. Balz, H. Kaiser, und P. H. Keck, Spectrochim. Acta **2**, 92, 1941.
 32. H. Kaiser, VDI-Zeitschrift **85**, 40, 1941.
 33. H. Kaiser, Stahl u. Eisen **61**, 35, 1941.
 34. H. F. Höfert, und P. H. Keck, Zeiss-Nachrichten (4), Heft **2**, 37, 1941.
 35. R. Schmidt, Recueil Trav. Chim. Pays-Bas. **60**, 378, 1941.
 36. W. Meyer-Eppler und W. Koehler, Arch. Elektrot. **35**, 603, 1941.
 37. N. S. Sventitski, Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Fiz. **5**, 222, 1941.
 38. F. Kemmler, Deutsche Patentschrift No. 712 654.
 39. H. Kaiser, und M. Sohm, Spectrochim. Acta **2**, 258, 1942.
 40. H. B. Vincent, und R. A. Sawyer, J. Opt. Soc. Amer. **32**, 686, 1942.
 41. M. F. Hasler, und H. W. Dietert, J. Opt. Soc. Amer. **33**, 218, 1943.
 42. J. Mika, A. Schöntag, und S. Hartwig, Z. wiss. Photogr. **42**, 12, 1943.
 43. G. Balz, Aluminium **26**, 60, 1944.
 44. S. F. Simpson, J. Opt. Soc. Amer. **35**, 40, 1945.
 45. R. G. Fowler, und R. A. Wolfe, J. Opt. Soc. Amer. **35**, 170, 1945.
 46. R. Schmidt, und A. Schuringa, Recueil Trav. Chim. Pays-Bas. **64**, 349, 1945.
 47. S. Levy, J. Opt. Soc. Amer. **35**, 221, 1945.
 48. V. J. Caldecourt und I. L. Saunderson, J. Opt. Soc. Amer. **36**, 99, 1946.
 49. A. Walsh, Bull. Brit. Non-Ferrous Met. Res. Assoc. No. **201**, 60, 1946.
 50. C. Braudo, und H. R. Clayton, Nature **157**, 622, 1946.
 51. C. Braudo, und H. R. Clayton, J. Soc. Chem. Ind. **66**, 259, 1947.
 52. D. A. Sinclair, J. Opt. Soc. Amer. **38**, 547, 1948.
 53. J. H. Enns, und R. A. Wolfe, Symposium on spectrographic light sources. Spec. Tech. Publ. Am. Soc. Test. Mat. Philadelphia, 1948.
 54. J. L. Saunderson, Symposium on spectrographic light sources. Spec. Techn. Publ. Am. Soc. Test. Mat., Philadelphia, 1948.
 55. E. Kaczor, und K. Chamberlain, J. Opt. Soc. Amer. **39**, 637, 1949.
 56. H. J. Enns, und R. A. Wolfe, J. Opt. Soc. Amer. **39**, 298, 1949.
 57. J. Mika, F. Macher, und B. Vorsatz, Anal. Chim. Acta **3**, 228, 1949.
 58. T. Török, Acta Chim. Hung., **2**, 289, 1950.
 59. R. J. Dwyer, J. Opt. Soc. Amer. **40**, 180, 1950.
 60. N. Marti, Spectrochim. Acta **4**, 430, 1950.
 61. G. G. Carlsson, und T. M. Yü., J. Iron Steel Inst. December, 273, 1950.
 62. H. T. Shirley, A. Oldfield, und H. Kitchen, J. Iron Steel Inst. December, 329, 1950.
 63. V. K. Prokofjev, Photographische Methoden der quantitativen Spekralanalyse von Metallen und Legierungen. Gosztechizdat. Moszkva, 1951.
 64. C. W. Rankin, Anal. Chem. **23**, 1722, 1951.
 65. J. van Calker, Spectrochim. Acta **5**, 19, 1952.
 66. K. Laqua, Spectrochim. Acta **4**, 446, 1952.
 67. J. van Calker, und W. Maass, Z. angew. Phys. **4**, 161, 1952.
 68. H. Bückert, Spectrochim. Acta **4**, 525, 1952.
 69. R. H. Steinberg, Appl. Spectroscopy **6**, 20, 1952.
 70. Á. Bardócz, J. Opt. Soc. Amer. **42**, 357, 1952.
 71. Á. Bardócz, Acta Phys. Hung., **2**, 265, 1953.
 72. Á. Bardócz, Spectrochim. Acta **5**, 397, 1953.
 73. A. G. Rouse, J. Opt. Soc. Amer. **40**, 82, 1950.
 74. J. D. Craggs, M. E. Haine, und J. M. Meek, J. Inst. Electr. Eng. **93**, III/A, 963, 1946.
 75. J. J. Martin, Diss. 1937.
 76. G. Scheibe, und J. Martin, Spectrochim. Acta **1**, 1941. 47.
 77. W. M. Murray, B. Gettys, und S. E. Q. Ashley, J. Opt. Soc. Amer. **31**, 433, 1941.
 78. A. Gatterer, und V. Frodl, Ric. Spettroscopiche **1**, 201, 1946.
 79. F. R. Bryan, und G. A. Nahstoll, J. Opt. Soc. Amer. **37**, 311, 1947.
 80. R. E. Keller, und L. Smith, Anal. Chem. **24**, 796, 1952.

ИСКРОВОЙ ВОЗБУДИТЕЛЬ С ЭЛЕКТРОНИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. БАРДОЦ

Резюме

Управление искровым возбудителем, используемым для целей спектрального анализа, может быть осуществлено с помощью маломощных электронных ламп, через которые управляемая энергия не пропускается, но которые только вызывают искровой разряд. В настоящей работе искровой разряд управляет тиратроном. Сущность электронического управления заключается в том, что применяются два искровых промежутка, один из которых шунтируется омическим сопротивлением, включенным последовательно с тиратроном. Если сетка тиратрона, замкнутая с отрицательным предварительным напряжением, получает положительный импульс, то сначала в нешунтированным, а затем в шунтированном тиратроном и омическим сопротивлением искровом промежутке совершается пробой, который зажигает основной разряд. Электроническое управление значительно уменьшает неустойчивость других управляющих систем. Кроме того применение электронического управления позволяет в весьма большом интервале изменять число искр на 1 сек. Это дает возможность легко регулировать и частоту прерывистых низковольтных конденсированных искр.

DIE BEWEGUNG DES ENERGIEMITTELPUNKTES UND DER ENERGIE-IMPULS-TENSOR DES ELEKTO- MAGNETISCHEN FELDES IN DIELEKTRIKA

Von

G. GYÖRGYI

ZENTRALFORSCHUNGSGESELLSCHAFT FÜR PHYSIK, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky. — Eingegangen: 18. II. 1954.)

Es werden die Bewegungsgesetze des Massenmittelpunktes der elektromagnetischen Energie und des mit dem elektromagnetischen Feld in Wechselwirkung stehenden Dielektrikums untersucht. Es ergibt sich, dass der Abrahamsche Energie-Impuls-Tensor mit den üblichen Begriffen der Mechanik und mit dem Satz von der gleichförmigen Bewegung des Massenmittelpunktes eines geschlossenen Systems in Einklang steht.

Die in isotropen Dielektrika gültige Form des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes stand im Mittelpunkt einer sich über mehrere Jahrzehnte hinziehenden Diskussion [1—7]. Einige Forscher traten für den von Minkowski [1] aufgestellten asymmetrischen Ausdruck

$$T_{ik}^M = \frac{1}{4\pi} \left(F_{iv} G_{kv} - \frac{1}{4} \delta_{ik} F_{vs} G_{vs} \right) \quad (1)$$

ein, während andere den von Abraham [2] vorgeschlagenen symmetrischen Tensor

$$T_{ik}^A = \frac{1}{8\pi} \left[F_{iv} G_{kv} + G_{iv} F_{kv} - \frac{1}{2} \delta_{ik} F_{vs} G_{vs} - (\varepsilon\mu - 1) (v_i \mathcal{Q}_k + v_k \mathcal{Q}_i) \right] \quad (2)$$

als den für die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und den Dielektrika charakteristischen, richtigen Energie-Impuls-Tensor anerkannten. Die gebrauchten Bezeichnungen sind:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B}_z - \mathfrak{B}_y - i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{B}_z & 0 & \mathfrak{B}_x - i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_x & 0 - i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -i\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -i\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -i\mathfrak{D}_z \\ i\mathfrak{D}_x & i\mathfrak{D}_y & i\mathfrak{D}_z & 0 \end{pmatrix}$$

für die zwei antisymmetrischen Tensoren, die das elektromagnetische Feld beschreiben bzw. die Feldgrößen \mathfrak{E} , \mathfrak{B} , \mathfrak{D} und \mathfrak{H} zusammenfassen,

$$\mathcal{Q}_i = v_k v_r F_{ir} (G_{ik} v_l + G_{kl} v_i + G_{li} v_k), \quad \text{ferner ist } v_i = \frac{1}{c} \frac{dx_i}{d\tau}$$

die Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums in Lichtgeschwindigkeitseinheiten,

und schliesslich bedeuten ϵ und μ die Dielektrizitätskonstante bzw. die magnetische Permeabilität des Dielektrikums.

Lange Zeit hindurch erfreute sich die Auffassung von *Abraham* einer grösseren Verbreitung, vor einigen Jahren wandte sich jedoch das Interesse wieder dem Minkowskischen Tensor zu [7]. In einer früheren Arbeit [8] wurden die in der Diskussion vorgebrachten Argumente und Gesichtspunkte zusammengefasst; diese wiesen darauf hin, dass von den in Frage stehenden Energie-Impuls-Tensoren der von *Abraham* stammende Ausdruck (2) mit den für die Energie, den Impuls und den Drehimpuls gültigen Erhaltungssätzen, mit den Anforderungen der Relativitätstheorie und mit der in der Auffassung der Elektronentheorie wurzelnden Anschauung im Einklang steht.

Der richtige Energie-Impuls-Tensor hat aber nicht nur über die Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses Auskunft zu geben, sondern muss auch mit den richtigen Bewegungsgesetzen des Energie- bzw. Massenmittelpunktes übereinstimmen. (Diese Erhaltungssätze sind die Folge der homogenen und isotropen Beschaffenheit des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums; weitere solche, aus der Invarianz der Bewegungsgleichungen gegenüber den Translationen und Drehungen des Zeit-Raum-Kontinuums folgende Erhaltungssätze sind nicht vorhanden [9].)

Im letzten Jahre befassten sich zwei Forscher mit der Bewegung des Energiemittelpunktes des mit Dielektrika in Wechselwirkung stehenden elektromagnetischen Feldes.

N. L. Balázs [10] diskutierte einige interessante Gedankenexperimente. Er fand im Laufe seiner Berechnungen, dass wenn man sich der Auffassung *Abrahams* anschliesst, der Energiemittelpunkt eines geschlossenen Systems, das aus dem elektromagnetischen Feld und dem sich mit diesem in Wechselwirkung befindlichen Dielektrikum besteht, eine gleichförmige Bewegung ausführt. Rechnet man hingegen mit den Minkowskischen Ausdrücken, so treten gewisse Schwierigkeiten auf. Aus seinen Gedankenexperimenten zog deshalb *Balázs* die Folgerung, dass man im Interesse der Aufrechterhaltung des Satzes über die gleichförmige Bewegung des Energiemittelpunktes den *Abrahamschen* Tensor als richtig anzuerkennen habe.

In seiner Arbeit, deren Hauptziel darin bestand, den Planckschen Satz über die Trägheit der Energie und den asymmetrischen Energie-Impuls-Tensor von *Minkowski* in Einklang zu bringen, gelangt *Beck* [11] auf Grund der Minkowskischen Auffassung zum Ergebnis, dass der vollständige Energie-Impuls-Tensor des aus einem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden geschlossenen Systems symmetrisch und natürlich divergenzfrei ist, weshalb für ihn der Satz von der gleichförmigen Bewegung des Energiemittelpunktes Gültigkeit hat [12].

Diese zwei sich scheinbar widersprechenden Folgerungen gaben den Anstoss zur eingehenden Untersuchung der Frage, welcher der beiden Energie-

Impuls-Tensoren mit den richtigen Bewegungsgesetzen des Energiemittelpunktes übereinstimmt.

Es sei T_{ik} der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes, D_{ik} der des Dielektrikums und S_{ik} der vollständige Energie-Impuls-Tensor des aus dem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden Systems:

$$S_{ik} = T_{ik} + D_{ik}. \quad (3)$$

Der Energie-Impuls-Tensor S_{ik} des vollständigen, geschlossenen Systems ist sowohl nach der Auffassung *Minkowskis* [11] als auch nach der *Abrahams* [8] divergenzfrei und symmetrisch:

$$\partial_r S_{ir} = 0, \quad S_{ik} = S_{ki}. \quad (3a)$$

Aus diesen Zusammenhängen folgt, dass

$$T_{ik} - T_{ki} = -D_{ik} + D_{ki} \quad (4)$$

und

$$\partial_r D_{ir} = -\partial_r T_{ir} = k_i. \quad (4a)$$

Hier bedeutet k_i die vom elektromagnetischen Feld auf das Dielektrikum ausgeübte ponderomotorische Viererkraftdichte.

Es sei nun folgender Ausdruck berechnet, der die Bewegung des Energiemittelpunktes des elektromagnetischen Feldes beschreibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV &= \int \partial_4 (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV = \\ &= \int (x_k \partial_4 T_{i4} - x_i \partial_4 T_{k4}) dV + \int (\delta_{4k} T_{i4} - \delta_{4i} T_{k4}) dV. \end{aligned}$$

Der Bereich des Integrierens ist der ganze dreidimensionale Raum. Laut Gl. (4a) ist

$$\partial_4 T_{i4} = - \sum_{a=1}^3 \partial_a T_{ia} - k_i,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV &= - \int \sum_{a=1}^3 (x_k \partial_a T_{ia} - x_i \partial_a T_{ka}) dV + \\ &+ \int (\delta_{4k} T_{i4} - \delta_{4i} T_{k4}) dV - \int (x_k k_i - x_i k_k) dV. \end{aligned}$$

Am ersten Glied der rechten Seite wird nun eine partielle Integration vorgenommen. Es wird vorausgesetzt, dass T_{ik} im Unendlichen so schnell verschwindet, dass das auftretende Oberflächenintegral Null ist. Als Ergebnis der Umgestaltungen gelangt man zu

$$\frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k T_{i4} - x_i T_{k4}) dV = \int (x_i k_k - x_k k_i) dV + \int (T_{ki} - T_{ik}) dV. \quad (5)$$

Es sei nun $i = 1, 2, 3$ und $k = 4$. In diesem Falle lässt sich die Gl. (5) in jenem Koordinatensystem, in dem die Effektdichte der ponderomotorischen Kräfte momentan Null beträgt*), folgendermassen schreiben :

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \frac{\mathbf{u}}{c^2} dV = i \int \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{f} \right) dV + \int \mathbf{g} dV + \int \left(\frac{1}{c^2} \mathfrak{S} - \mathbf{g} \right) dV. \quad (6)$$

Hier ist $\mathbf{u} = -T_{44}$, nämlich die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes \mathbf{g} ($T_{14}/ic, T_{24}/ic, T_{34}/ic$) die Feldimpulsdichte, $\mathfrak{S}(-icT_{41}, -icT_{42}, -icT_{43})$ die Stromdichte der Feldenergie und \mathbf{f} (k_1, k_2, k_3) die ponderomotorische Kraftdichte.

Das erste Integral der rechten Seite ist laut Gl. (4a) das Integral einer dreidimensionalen Divergenz, weshalb es zu einem auf die unendlich entfernte Fläche erstrecktes Integral umgestaltet werden kann. Da dort T_{ik} Null ist, verschwindet es. Es sei nun die zeitliche Ableitung des Ausdruckes (6) gebildet und an Stelle von $\partial \mathbf{g} / \partial t$ das sich von diesem nur in einer Divergenz unterscheidende \mathbf{f} eingesetzt. Das Ergebnis lautet :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \frac{\mathbf{u}}{c^2} \mathbf{r} dV = - \int \left[\mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \right) \right] dV. \quad (7)$$

Dieser Zusammenhang besagt, dass der elektromagnetische Energiemittelpunkt dann seine Geschwindigkeit ändert, wenn auf die im Raum befindliche Materie eine ponderomotorische Kraft wirkt (das erste Glied der rechten Seite ist deren Reaktionskraft) oder wenn sich die Grösse $\mathbf{g} - \mathfrak{S}/c^2$ mit der Zeit verändert. Diesem Gliede könnte man schwer eine physikalische Bedeutung zuschreiben.

Vor einer eingehenderen Untersuchung des erhaltenen Resultates sei der vorige Gedankengang anstatt mit dem Energie-Impuls-Tensor T_{ik} des elektromagnetischen Feldes auch mit dem die Energie und den Impuls des Dielektrikums beschreibenden Tensor \mathbf{D}_{ik} ausgeführt.

*) Dieses Koordinatensystem wurde zur Vereinfachung der Berechnungen gewählt. Im Falle der Benutzung eines anderen Koordinatensystems müsste wegen der vom Feld geleisteten Arbeit auch die Veränderung der Ruhmasse des Dielektrikums berücksichtigt werden [13].

Die Umgestaltung des Ausdruckes

$$\frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int (x_k D_{i4} - x_i D_{k4}) dV$$

führt bei Heranziehung der Zusammenhänge (4—4a) zu folgendem Ergebnis (es wird hierbei wieder das Koordinatensystem benutzt, in dem die momentane Effektdichte Null ist) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mu \mathfrak{r} dV = \int \left[\mathfrak{k} + \frac{\partial}{\partial t} \left(g - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \right) \right] dV. \quad (8)$$

Hier bedeuten \mathfrak{k} , g und \mathfrak{S} dasselbe wie früher, während $\mu = -D_{44}/c^2$ die Massendichte 'des Dielektrikums' bezeichnet.

Jetzt sei auf die Besprechung der als Gl. (7) und (8) erhaltenen Ergebnisse übergegangen.

Addiert man die Gleichungen (7) und (8), so ergibt sich

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \left(\mu + \frac{u}{c^2} \right) \mathfrak{r} dV = 0, \quad (9)$$

d. h. dass sich der gemeinsame Massenmittelpunkt des Dielektrikums und der Energie des elektromagnetischen Feldes mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Dieses Ergebnis ist, wie aus der Herleitung hervorgeht, unabhängig davon, ob man sich der Auffassung von *Minkowski* oder von *Abraham* anschliesst und stimmt mit dem eingangs erwähnten Resultat von *Beck* überein.

Die Zusammenhänge (7) und (8) geben also die Bewegungsgesetze des Energiemittelpunktes des elektromagnetischen Feldes und des Energiemittelpunktes des Dielektrikums.

Es ist beachtenswert, dass man zu demselben Ergebnis für die rechte Seite des Ausdrückes (7) gelangt, ob man nun die Berechnung auf Grund des Abrahamschen oder aber des Minkowskischen Tensors durchführt. Die sich als Divergenz des Minkowskischen Tensors ergebende Kraftdichte lautet bei Beschränkung auf ein ladungs- und stromfreies, ruhendes isotropes Dielektrikum :

$$\mathfrak{k}^M = -\frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu). \quad (10)$$

Die Ausdrücke für die Impulsdichte und den Energiestrom sind gemäss der Minkowskischen Auffassung

$$g^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{B}, \quad (11)$$

$$\mathfrak{S}^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \quad (12)$$

Auf der rechten Seite der Gl. (7) ist also der Integrand laut der Auffassung *Minkowskis* :

$$\mathfrak{f}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right) = - \frac{1}{8\pi} \left(\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right). \quad (13)$$

Aus dem Abrahamschen Tensor erhält man dagegen für die Kraft, den Impuls und die Dichte des Energiestromes :

$$\mathfrak{f}^A = - \frac{1}{8\pi} \left(\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right). \quad (14)$$

$$\mathfrak{g}^A = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^A = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \quad (15)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^A + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathfrak{g}^A - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^A \right) &= \mathfrak{f}^A = \frac{1}{8\pi} \left(\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) = \mathfrak{f}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathfrak{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right), \end{aligned} \quad (16)$$

somit tatsächlich der gleiche Ausdruck wie nach der Minkowskischen Auffassung. Die Bewegung des elektromagnetischen Energiemittelpunktes wird also — wie ja zu erwarten war — durch die Feldgrößen sowie durch den nach beiden Auffassungen übereinstimmenden Ausdruck der Feldenergie bestimmt, wobei die Wahl der übrigen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors keinen Einfluss auf ihre Grösse hat.

Der Unterschied zwischen den beiden Auffassungen tritt dann zutage, wenn man den die Bewegung des Massenmittelpunktes des Dielektrikums bestimmenden Zusammenhang (8) untersucht. Die rechte Seite der Gl. (8) sei bei Verwendung der Kontinuitätsgleichung der Materie

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = - \operatorname{div} (\mu \mathfrak{v})$$

und der vektoranalytischen Identität

$$\mathfrak{r} \operatorname{div} (\mu \mathfrak{v}) = \operatorname{Div} (\mu \mathfrak{r}^\circ \mathfrak{v}) - \mu \mathfrak{v}$$

umgestaltet :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mu \mathbf{r} dV = \frac{d}{dt} \int \frac{\partial \mu}{\partial t} \mathbf{r} dV = \frac{d}{dt} \int \mu \mathbf{v} dV .$$

Das während der Umgestaltung aufgetretene Oberflächenintegral ist Null, wenn die Materie nur einen endlichen Raumteil ausfüllt. Hier soll nur dieser Fall behandelt werden.

Nach der Umgestaltung weist die Gl. (8) folgende Gestalt auf :

$$\frac{d}{dt} \int \mu \mathbf{v} dV = \int \left[\mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) \right] dV . \quad (17)$$

Nimmt man nun die Minkowskischen Ausdrücke der ponderomotorischen Kraft, des Feldimpulses und der Energiedichte als richtig an, so gelangt man zu dem sonderbaren Ergebnis, dass sich der Impuls

$$\mathbf{p} = \int \mu \mathbf{v} dV \quad (18)$$

des Dielektrikums nicht nur infolge der Einwirkung der ponderomotorischen Kraft $\int \mathbf{f}^M dV$ verändert, sondern auch dann, wenn

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathbf{S}^M \right) dV \neq 0 ,$$

ein Fall, dem man schwer einen physikalischen Sinn wird geben können. Das auf Grund der Minkowskischen Auffassung erhaltene Ergebnis für den Gesamtimpuls \mathbf{p} des Dielektrikums besagt also, dass die aus der Mechanik wohlbekannte Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R} \quad (\mathbf{R} = \int \mathbf{f}^M dV) \quad (19)$$

keine Gültigkeit besitzt, sondern dass statt ihrer

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R} + \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathbf{S}^M \right) dV \quad (20)$$

gilt. Dieser Zusammenhang, aus dem hervorgeht, dass die Veränderung des Impulses in der Zeiteinheit nicht der wirkenden Kraft gleich ist, stellt ein ebenso unannehmbares Ergebnis der Asymmetrie des Minkowskischen Tensors dar wie dasjenige, dass die Veränderung des Impulses in der Zeiteinheit nicht dem Drehmoment der ponderomotorischen Kräfte gleich ist [5, 8].

Der Zusammenhang (20) sowie die den gleichen Inhalt aufweisende Gl. (8) ist für die Befriedigung des Zusammenhanges (9) massgeblich, der über die gleichmässige Bewegung des Energiemittelpunktes des aus dem Dielektrikum und dem elektromagnetischen Feld bestehenden geschlossenen Systems Auskunft gibt. Die von Balázs [10] in seiner eingangs erwähnten Arbeit vorgeführten Beispiele zeigen gerade, dass sich der Energiemittelpunkt des vollständigen geschlossenen Systems, wenn man anstatt mit Gl. (20) mit der in der Mechanik üblichen Gl. (19) rechnet, nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Wie bei der Herleitung von Gl. (9) zu sehen war, führt der Minkowskische Energie-Impuls-Tensor nicht zu einem zur gleichförmigen Bewegung des Energiemittelpunktes geschlossener Systeme gegensätzlichen Ergebnis. Trotzdem wird man aber nicht sagen können, dass der Minkowskische Energie-Impuls-Tensor die naturgetreueste Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den Dielektrika und dem elektromagnetischen Feld gibt. Die Akzeptierung dieses Tensors führt nämlich zu den Zusammenhängen (17—20), die — wie gezeigt wurde — im Gegensatz zur Gl. (19) der Mechanik stehen. Die Übereinstimmung der Gleichungen (17) und (19) mit den Gesetzen der Mechanik liesse sich höchstens so retten, dass man den Impuls des Dielektrikums von der Gewohnheit abweichend durch die Gleichung

$$p' = \int \left[\mu v - \left(g^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right) \right] dV = \int \left(\mu v + \frac{1 - \epsilon \mu}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) dV \quad (21)$$

definiert. In diesem Falle könnte man den aus dem Minkowskischen Tensor erhaltenen Zusammenhang (17) in der dem Ausdruck (19) ähnlichen Form

$$\frac{dp'}{dt} = \mathfrak{R}$$

schreiben.

Die Definition (21) weicht aber vollständig von den üblichen Begriffsbildungen der Mechanik ab. Demgemäß würde der Impuls des in das elektromagnetische Feld gestellten Dielektrikums ausser vom Bewegungszustand auch von den Feldgrössen abhängen. So würde man z. B. für den Impuls eines von einer elektromagnetischen Welle durchstrahlten ruhenden Dielektrikums einen Wert erhalten, der von Null abweicht.

Aus Gl. (21) geht hervor, auf welche Weise man zu dem den Minkowskischen Tensor asymmetrisch machenden Feldimpulsdichte-Ausdruck

$$g^M = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{B}$$

gelangt. Die vollständige Impulsdichte

$$\mu v + \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$

was viel natürlicher ist als Gl. (22). Jetzt gilt auch für die elektromagnetische Energie der Plancksche Satz über die Trägheit der Energie

$$g^A = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^A . \quad (24)$$

Auch die Gl. (17) gewinnt in der Abrahamschen Auffassung eine tiefere physikalische Bedeutung. Nach dieser Auffassung ist die ponderomotorische Kraftdichte

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^A = & -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right) = \\ & = \mathfrak{k}^M + \frac{\partial}{\partial t} \left(g^M - \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^M \right) . \end{aligned} \quad (25)$$

Wie in einer früheren Arbeit [8] nachgewiesen wurde, enthält das letzte Glied unter anderem auch die auf den Polarisationsstrom wirkende Lorentzsche Kraft, die sowohl auf Grund des Prinzips von Aktion und Reaktion als auch auf Grund der sich auf die Elektronentheorie stützenden Anschauung zu berücksichtigen ist. Dies lässt sich gut aus der folgenden Schreibweise des Kraftausdruckes (25) erkennen, der die Entstehungsursache der einzelnen Kräfte hervorhebt :

$$\mathfrak{k}^A = (\mathfrak{P} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \mathfrak{E} \times \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} - \operatorname{grad} \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{P} + \mathfrak{H} \mathfrak{M}) .$$

(Diese Form [8] ergibt sich aus dem allgemein bekannten Ausdruck (25) der Abrahamschen Kraftdichte, wenn man die Feldgleichungen und einige vektoranalytische Zusammenhänge heranzieht.)

Die Impulsänderung der Materie des Dielektrikums steht nun infolge der Befriedigung des Satzes von der Erhaltung der Energie (24) laut Gl. (17) bereits mit der aus der Mechanik wohlbekannten Formel

$$\frac{d}{dt} \int \mu v dV = \int \mathfrak{k}^A dV \quad (26)$$

im Einklang. Die Abrahamsche Trennung (23) der Gesamtimpulsdichte von Dielektrikum und elektromagnetischem Feld stimmt nicht nur mit der üblichen Form (26) der Bewegungsgleichung des Dielektrikums überein, sondern schaltet auch die übrigen erwähnten Schwierigkeiten aus.*

* Wenn man nach der Auffassung Abrahams rechnet, ergibt sich, dass der Impuls des Pothons ein zeitartiger Vektor und seine Ruhmasse reell ist.

Bei der in der vorliegenden Arbeit durchgeföhrten Untersuchung der Bewegungsgesetze des Massenmittelpunktes der Energie des elektromagnetischen Feldes und des mit dem Felde in Wechselwirkung stehenden Dielektrikums ergab sich, dass bei Verwendung des für Dielektrika des elektromagnetischen Feldes gegebenen Minkowskischen Energie-Impuls-Tensors der Satz über die gleichmässige Bewegung des Energiemittelpunktes von geschlossenen Systemen nur dann erfüllt ist, wenn man für die Bewegungsgleichung des Dielektrikums die Form

$$\frac{d}{dt} \int \mu v dV = \int t^M dV + \int \frac{\partial}{\partial t} \left(g^M - \frac{1}{c^2} \gamma^M \right) dV$$

wählt. Die Akzeptierung dieses Zusammenhanges zieht zahlreiche Schwierigkeiten nach sich, die sich aber ausschalten lassen, wenn man den Abrahamischen Ausdruck (2) als den Energie-Impuls-Tensor ansieht, der die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und den Dielektrika beschreibt.

* * *

Hier sei *G. Marx*, Kandidaten der physikalischen Wiessenschaften, für sein ständiges Interesse an der vorliegenden Arbeit, für seine wertvollen Ratschläge und seine nützliche Kritik der aufrichtige Dank des Verfassers ausgesprochen.

LITERATUR

1. *H. Minkowski*, Göttinger Nachr. **53**, 1908.
2. *M. Abraham*, Rend. d. circ. mat. di Pal. **28**, 1, 1909.
3. *R. Grammel*, Ann. d. Phys. **41**, 570, 1913.
4. *H. Dällenbach*, Ann. d. Phys. **58**, 523, 1919.
5. *И. Е. Тамм*, Основы теории электричества, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949.
6. *K. F. Novobázky*, Hung. Acta Phys. **1**, No. 5, 1949.
7. *M. v. Laue*, Z. Phys. **128**, 387, 1950.
8. *G. Marx—G. Györgyi*: Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
9. *E. Noether*, Göttinger Nachr. 253, 1918.
10. *N. L. Balázs*, Phys. Rev. **91**, 408, 1953.
11. *F. Beck*, Z. Phys. **134**, 136, 1953.
12. *Д. Иваненко—А. Соколов*, Квантовая теория поля, Москва, 1952.
13. *M. Abraham*, Phys. Zs. **10**, 737, 1909.

ДВИЖЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА И ТЕНЗОР ИМПУЛЬСА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Г. ДЬЕРДЬИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается движение центра масс электромагнитной энергии и диэлектрика, взаимодействующего с электромагнитным полем. Обычным понятиям классической механики и теореме о равномерном движении центра масс консервативной системы соответствует тензор импульса-энергии Абрагама.

ÜBER DAS DIVERGENZPROBLEM DER W. K. B. METHODE

Von

I. FÉNYES

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER ROLAND EÖTVÖS-UNIVERSITÄT, BUDAPEST

(Vorgelegt von P. Gombás. — Eingegangen: 23. IV. 1954.)

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass der divergente Charakter der W. K. B. Methode in einem inneren Widerspruch begründet ist. Dieser innere Widerspruch hängt damit zusammen, dass die W. K. B. Methode die Lösung der Schrödingerschen Gleichung von der klassischen Mechanik (als nullter Näherung) ausgehend sucht. Die Bewegung der klassischen Mechanik hat nämlich im allgemeinen einen anderen Wendepunkt als die irreguläre Bewegung der Quantenmechanik, und die sich daraus ergebende Abweichung kann auch durch Heranziehung höherer Näherungen nicht eliminiert werden. Mathematisch kommt dieser Widerspruch dadurch zum Ausdruck, dass die, bei der W. K. B. Methode angewandte Reihenentwicklung nicht existiert. Es wird gezeigt, dass durch Verwendung einer existierenden Reihenentwicklung und durch Berücksichtigung der Abhängigkeit des Eigenwertes E von \hbar die Methode divergenzfrei gemacht werden kann. Dabei wird auch der Grund dafür ersichtlich, dass die der W. K. B. Methode entsprechende erste Näherung in einem gewissen Bereich ein ziemlich gutes Resultat liefert. Endlich folgt eine Diskussion der Anwendbarkeit der allgemeinen Quantenbedingung, der sich dabei ergebenden Möglichkeiten und der gebotenen Einschränkungen.

1. Die Schrödingersche Gleichung der eindimensionalen Probleme kann in der Gestalt

$$\hbar^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + p^2 f = 0 \quad (1)$$

geschrieben werden, wobei p den klassischen Impuls bedeutet. Im einfachsten Falle gilt

$$p^2 = 2 m (E - V). \quad (2)$$

In den Fällen, wo wir mehrdimensionale Probleme durch Trennung der Veränderlichen auf eindimensionale zurückführen, ist p^2 im allgemeinen auf eine kompliziertere Weise als durch (2) gegeben. (Z. B. H-Atom, H_2^+ -Molekül.)

Die Eigenfunktion f ist letzten Endes immer reell, kann aber als lineare Kombination zweier komplexen (im allgemeinen irregulären) Wellenfunktionen dargestellt werden. Dies ist der Umstand, den die W. K. B. Methode bei der angenäherten Lösung von (1) zu verwerten sucht. Wie bekannt, kann die Gleichung (1) durch Wellenfunktionen φ folgender Art befriedigt werden (die aber nur im Falle von entarteten Problemen Eigenfunktionen sein können):

$$\varphi = \exp \frac{i}{\hbar} \int y dx; \quad y = \frac{\hbar}{i} \frac{\varphi'}{\varphi}. \quad (3)$$

(3) ist immer eine Lösung von (1), falls y folgende Riccatische Gleichung befriedigt :

$$\frac{\hbar}{i} y' + y^2 - p^2 = 0. \quad (4)$$

Aus y gewinnt man die reelle Eigenfunktion folgendermassen :

$$f = a \left(\exp \frac{i}{\hbar} \int y dx + \exp - \frac{i}{\hbar} \int y^* dx \right), \quad (5)$$

wo y^* die Konjugierte von y bedeutet.

Den Annahmen der W. K. B. Methode gemäss¹ [1], [2], [3] können die Lösungen der Gleichung (4) durch folgende Reihe dargestellt werden :

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \left(\frac{\hbar}{i} \right)^l. \quad (6)$$

Indem wir dies in (4) einsetzen, gelangen wir — durch Vergleichung der entsprechenden Potenzen von $\frac{\hbar}{i}$ — zu folgenden Rekursionsformeln :

$$\begin{cases} y_0 = \pm p, \\ y'_{l-1} + \sum_{n=0}^l y_{l-n} y_n = 0; \quad l = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

Da p auch die Energieeigenwerte enthält, ist (7) nur dann praktisch brauchbar, wenn der Eigenwert E bekannt ist. Zur Bestimmung der Eigenwerte dient eine allgemeine Quantenbedingung, die als Spezialfall in der Bohr-Sommerfeldschen Bedingung enthalten ist.

Damit wäre das Problem auch schon gelöst, wäre die Reihe (6) an den Stellen, wo $p^2 = 0$ ist, laut (7) augenscheinlich nicht divergent. Wir begnügen uns damit, die Untersuchungen [2], [4], [5], [6], die auf eine Elimination der Divergenz an den Stellen $p^2 = 0$ hirzielen, bloss zu erwähnen, da wir in der vorliegenden Arbeit einen von dem ihren wesentlich verschiedenen Weg einschlagen.

Trotz der erwähnten Schwierigkeiten ist die W. K. B. Methode heute noch eine der anerkannten Näherungsmethoden der Quantenmechanik. Dies ist teil-

¹ Die angeführten Literaturangaben dienen nur zur Orientierung. Wir halten es nicht für nötig, Vollständigkeit anzustreben.

weise dadurch zu erklären, dass diese Methode von der Hamilton-Jacobischen Gleichung der klassischen Mechanik als nullter Näherung ausgeht, und teilweise dadurch, dass die mit dieser Methode erzielte erste Näherung oft ein befriedigendes Resultat liefert. Das wesentliche an der W. K. B. Methode wäre eben der Übergang, der sich durch sie von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik ergibt.

Da an den Stellen $p^2 = 0$ die Reihe (6) divergent ist, obgleich die gewünschte Lösung es offenbar nicht sein kann, taucht die Frage nach der Ursache dieser Divergenz auf. Es ist augenscheinlich, dass die Divergenz nur von einem, der W. K. B. Methode innenwohnenden, mathematischen Fehler herrühren kann. Die Reihe (6) ist nämlich (wie wir sehen werden) mit der Gleichung (4) im allgemeinen nicht vereinbar. Es ist nur selbstverständlich, dass in solchen Fällen Schwierigkeiten auftreten. Es scheint daher zweckmäßig, statt die Schwierigkeiten zu umgehen, den Fehler aufzusuchen, und statt (6) eine wirklich existierende Reihenentwicklung zu verwenden. In diesem Sinne werden wir uns in der vorliegenden Arbeit mit dem Problem beschäftigen.

Genauer gesagt, werden wir die folgenden Fragen untersuchen: 1. Welches sind die mittels der W. K. B. Methode gemachten Aussagen, deren Gültigkeit von der Reihenentwicklung (6) unabhängig ist? 2. Was ist der Grund dafür, dass, trotz der Fehler, die erste Näherung der W. K. B. Methode oft auch praktisch befriedigende, brauchbare Resultate liefert? 3. Was für eine, mit (4) verträgliche, Reihenentwicklung muss man statt (6) anwenden?

2. Vor allem werden wir die Bedeutung jener Aussage kritisch untersuchen, wonach man von der Wellenmechanik durch den Übergang $\hbar \rightarrow 0$ zur klassischen Punktmechanik gelangt. In letzter Zeit sind die prinzipiellen Fragen der Quantenmechanik in verschiedener Form erneut untersucht worden. Ein Teil dieser Untersuchungen geht in formaler Hinsicht auf eine frühere Idee von *De Broglie* [7] zurück. Diese Idee gründet sich auf die Tatsache, dass die Gleichung (1) durch die Substitution

$$\varphi = \varrho^{1/2} \exp \frac{i}{\hbar} \int u dx \quad (8)$$

in die zwei reellen Gleichungen

$$\frac{d}{dx} (\varrho u) = 0 \quad , \quad (9)$$

$$E = -\frac{1}{2m} u^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varrho^{1/2}} \frac{d^2 \varrho^{1/2}}{dx^2} \quad (10)$$

übergeht, wobei der Bornschen Hypothese entsprechend

$$\varphi^* \varphi = |\varphi|^2 = \varrho \quad (11)$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte, und

$$\frac{u}{m} = c \quad (12)$$

die Geschwindigkeit des Wahrscheinlichkeitsstromes bedeutet. Im Hinblick auf unser gegenwärtiges Problem muss hervorgehoben werden, dass (9) und (10) einen statistischen Vorgang charakterisieren [8]. Neuerdings ist auch in anderer Beziehung nachdrücklich darauf hingewiesen worden [9], [10], dass das durch

$$u = \frac{dS}{dx} \quad (13)$$

definierte Potential S von der Wirkungsfunktion der klassischen Mechanik wesentlich verschieden ist. In der klassischen Mechanik spielen nämlich die vollständigen Lösungen eine Rolle, wogegen in der quantenmechanischen Wirkungsfunktion S keine Integrationskonstanten auftreten können. Diese Eigenschaft der Funktion S bleibt offenbar auch im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ bestehen; auch ist es klar, dass auch die Gültigkeit von (9) vom Übergang $\hbar \rightarrow 0$ unabhängig ist. Wir werden sogleich sehen, was für eine Bedeutung diesem Umstande zukommt. Bereits *L. A. Young* [11] hat darauf hingewiesen, dass im Falle von eindimensionalen stationären Problemen die Beziehung

$$\varrho u = \text{Konstante} = a^2, \quad \varrho = \frac{a^2}{u} \quad (14)$$

gilt, was man übrigens auf Grund von (9) auch unmittelbar einsehen kann. Der Quotient u/m spielt also in der Quantenmechanik diejenige Rolle, die in der klassischen Statistik dem Erwartungswert der Geschwindigkeit zukommt. Es ist nämlich bekannt, dass im Sinne der klassischen Statistik der stationären Prozesse die Wahrscheinlichkeit eines Treffers im Intervall dx der Zeitspanne des Aufenthaltes proportional ist:

$$dt = \frac{dx}{c}, \quad \left(\frac{dx}{dt} = c = \text{Geschwindigkeit} \right); \quad (15)$$

somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\varrho = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{u};$$

Der klassische Grenzfall der Quantenmechanik ist also nicht die klassische Punktmechanik, sondern die durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}(\varrho u) = 0, \\ E = \frac{1}{2m} u^2 + V \end{array} \right. \quad (16)$$

charakterisierte Statistik. Wir können auch sagen, dass die Gleichungen (16) die Bewegung einer Flüssigkeit vom Druck Null beschreiben. Das durch (9) und (10) charakterisierte quantenmechanisches Problem unterscheidet sich vom klassischen Fall nur insofern, dass die Spannung nicht gleich Null ist. Dieser Umstand gelangt durch das Auftreten eines »Quantenpotentials« zum Ausdruck.

(Das Wort »Potential« deutet auf die Auffassung hin, bei welcher man — unter Ausserachtlassung der Bedeutung der Kontinuitätsgleichung (9) — sowohl (10) als auch (16) als Bewegungsgleichungen der Punktmechanik betrachtet. Nach dem Vorhergesagten entspricht diese Auffassung der Wirklichkeit untreu; in beiden Fällen handelt es sich um die Bewegung eines Kontinuums.)

Die quantenmechanische [s. (9) und (10)] und die klassische [s. (16)] Bewegung stimmen auch darin überein, dass sie beide im Falle $u \neq 0$ einen Wendepunkt haben. Eine Ausnahme ist nur die zyklische Bewegung. Ist die Bewegung nicht zyklisch, so sind die Lösungen sowohl in der Quantenmechanik als auch im klassischen Falle irregulär. Die beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass der quantenmechanische Wendepunkt am Rande des Gebietes liegt, während sich die klassischen Wendepunkte im Inneren des Gebietes befinden. Der quantenmechanische Wendepunkt wird durch das Auftreten des Quantenpotentials an den Rand des Gebietes hinausgeschoben.

Aus der Relation (14) folgt unmittelbar, dass in den Wendepunkten die Dichte unendlich wird. Daraus ersieht man aber, dass auch die Lösung (3) an den Rändern des Gebietes unendlich wird. Die mit der W. K. B. Methode erhaltene Lösung wird aber nicht an den Rändern des quantenmechanischen, sondern an denjenigen des klassischen Bahngebietes unendlich, d. h. an den Stellen mit $p^2 = 0$. Nun ist dieser Unterschied zwischen den beiden Fällen unüberbrückbar. Auch die höheren Näherungen der W. K. B. Methode können die Wendepunkte nicht weiter hinausschieben, und so ist das Verfahren an den Stellen $p^2 = 0$ unvermeidlich divergent. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, müsste man bereits die nullte Näherung so wählen, dass sie an den Rändern des Gebietes unendlich wird. Wie wir sehen, wird also die Schwierigkeit gerade durch denjenigen Umstand verursacht, mit dem man die W. K. B. Methode zu motivieren pflegt, nämlich, dass der Näherung die klassische Mechanik zu Grunde liegt. Hierdurch wird es aber eindeutig klar, wie man die W. K. B. Methode divergenzfrei machen kann. Da wir nicht von dem klassischen Grenzfall ausgehen dürfen, können wir auch den Ansatz (6) offenbar nicht gebrauchen, da dieser zu der Rekursion (7) und somit zum klassischen Grenzfall führt.

3. Auf Grund des Vorhergesagten können wir bereits zwei der aufgeworfenen Fragen beantworten : 1. Welche Aussagen der W. K. B. Methode sind es, die von der Reihenentwicklung (6) unabhängig Gültigkeit haben? 2. Wie kann man die erste Näherung von der Reihenentwicklung (6) unabhängig theoretisch begründen? Die folgenden Tatsachen sind grösstenteils nicht neu, neu ist nur der Gesichtspunkt von dem wir sie untersuchen.

Es sei der Kürze halber

$$v = \frac{1}{2} \frac{\varrho'}{\varrho} . \quad (17)$$

dann gilt

$$y = u + \frac{\hbar}{i} v , \quad (18)$$

und (9) und (10) können in folgender Form geschrieben werden :

$$u' + 2uv = 0 , \quad (19)$$

$$\hbar^2 (v^2 + v') + p^2 - u^2 = 0 . \quad (20)$$

Den aus (19) gewonnenen Ausdruck für v [11] setzen wir jetzt in (20) ein :

$$E = \frac{u^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{u''}{u} - \frac{3}{2} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right\} , \quad (21)$$

und wenn wir u gemäss (14) durch ϱ ausdrücken :

$$E = \frac{a^2}{2m} \frac{1}{\varrho^2} + V + \frac{\hbar^2}{4m} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2 - \frac{\varrho''}{\varrho} \right\} , \quad (22)$$

falls $u \neq 0$ ist.

Offenbar kann man erreichen, dass E in (21) und (22) mit dem Eigenwert der Energie übereinstimmt. Wir haben schon erwähnt, dass die komplexen Lösungen φ — obwohl stationär — im allgemeinen keine Eigenfunktionen sind. Die zu untersuchenden Eigenwertprobleme können aber immer als die Resultierenden von einander entgegenlaufenden kohärenten Strömungen aufgefasst werden, wobei die resultierende Strömungsgeschwindigkeit gleich Null ist. Eine Ausnahme bilden nur die Fälle, in welchen x eine zyklische Koordinate bedeutet (z. B. ebener Rotator). Hier ist man formal berechtigt z. B. von einer Rotation nach rechts bzw. nach links zu sprechen, aber die reelle Lösung ist auch hier die Resultierende der verschiedenen gerichteten kohärenten Strömungen. Also

sind die Lösungen der zu untersuchenden Eigenwertprobleme durch reelle Eigenfunktionen der Form

$$f = \frac{a}{2} \frac{1}{u^{1/2}} \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \int u dx + \exp - \frac{i}{\hbar} \int u dx \right\},$$

d. h. der Form

$$f = \frac{a}{u^{1/2}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right) = a \exp \int \eta dx \quad (23)$$

charakterisiert.

Zur Erklärung des Gesagten müssen wir noch folgendes hinzufügen: Da ϱ Wahrscheinlichkeitsdichte bedeutet, muss notwendigerweise

$$\varrho \geq 0$$

gelten. Auf Grund von (14) folgt aber hieraus, dass u das Vorzeichen nicht wechseln kann. Es sind also (19) und (20) die Gleichungen einer Wahrscheinlichkeitsströmung eindeutiger Richtung. (Die Strömung kann sowohl positiver als auch negativer Richtung sein.) Aus physikalischen Gründen folgt, dass $u = 0$ (und $\varrho = \infty$), vom Falle $u \equiv 0$ abgesehen, nur an den Endpunkten des Gebietes möglich ist.

Die Eigenfunktion (23) repräsentiert schon eine statische Dichteverteilung. Dementsprechend kann das Eigenwertproblem immer durch statische Dichteverteilung verwirklicht werden. Für die statische Dichte, die natürlich von ϱ verschieden ist, haben wir die Formel

$$f^2 = \frac{a^2}{u} \cos^2 \left(\frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right).$$

η in (23) entspricht dem in (17) definierten v , also gilt

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \frac{df^2}{dx} = \frac{f''}{f}. \quad (24)$$

(Der statische Zustand wird dadurch hervorgerufen, dass auf Kosten der kinetischen Energie der einander entgegenlaufenden Strömungen das »Quantenpotential« zunimmt. Wir dürfen auch behaupten, dass die Interferenz der einander entgegenlaufenden kohärenten Wellen stehende Wellen zustände bringt. Auch die Interferenz wird also durch das Quantenpotential möglich gemacht. Der klassische Fall (16) kann auch auf den statischen Fall reduziert werden:

$$E = \frac{a^2}{2m} \frac{1}{\varrho^2} + V$$

wo jetzt das erste Glied rechts nicht die kinetische Energie, sondern die Energie der inneren Spannung des Kontinuums bedeutet. Natürlich gibt es in diesem Falle keine Interferenz. Dass das Quantenpotential Interferenz hervorrufen kann, liegt daran, das es von ϱ' und von ϱ'' abhängig ist, und somit die Oszillation von ϱ die Zunahme der Energie mit sich bringt.)

Auf Grund von (23) erhalten wir für das (statistische) Eigenwertproblem statt (20) die folgende Gleichung :

$$\hbar^2(\eta^2 + \eta') + p^2 = 0. \quad (25)$$

Mit Hilfe der Identität

$$-p^2 = -u^2 + \hbar^2(v^2 + v') \equiv \hbar^2(\eta^2 + \eta')$$

kann η , falls u (und v) bekannt ist, leicht bestimmt werden. Hingegen ist die Bestimmung von u (und von v), in Kenntnis vom η (bezw. f) eine wesentlich kompliziertere Aufgabe, es muss nämlich die Gleichung

$$f^2 u + \frac{\hbar^2}{u^2} \left(\frac{dfu^{1/2}}{dx} \right)^2 = a^2$$

für u gelöst werden.

Wir haben schon erwähnt, dass u nicht Null (und ϱ nicht unendlich) sein kann. Jetzt weisen wir auch darauf hin, dass auch u nicht unendlich (und ϱ nicht Null) sein kann. Die (n -te) Eigenfunktion, (23), hat nämlich im endlichen Teil des Gebietes $x, n-1$ Nullstellen, und dies ist nur so möglich, dass die Funktion $\cos \left(\frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right)$ den Wert Null $n-1$ -mal annimmt. Würde f infolge des Unendlichwerdens von u verschwinden, dann müsste zugleich die Funktion $\cos \left(\frac{1}{\hbar} \int u dx + \delta \right)$ unendlich viele Nullstellen haben, da dass Argument $\frac{1}{\hbar} \int u dx$ unendlich viele Male die Periode π durchlaufen würde. Aus dieser Eigenschaft von (23) ergibt sich (nach L. A. Young) folgende Formulierung der Quantenbedingung [11] :

$$\int_{\alpha}^{\beta} u dx = k\hbar\pi. \quad (26)$$

Hier bedeuten α und β die Grenzpunkte des Gebietes.

Die Gleichungen (21) und (22), der Ausdruck (23) für die Eigenfunktion, sowie die Quantenbedingung (26) haben eine von der Reihenentwicklung (6) unabhängige, exakte Gültigkeit. Aus (23) wird ersichtlich, dass die erste Näherung der W. K. B. Methode, die (im Inneren des klassischen Bahngebietes) die Gestalt

$$f = \frac{a}{p^{1/2}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p dx + \delta \right) \quad (27)$$

hat, die exakte Eigenfunktion (23) in denjenigen Gebieten, wo

$$\frac{u}{p} \approx 1 \quad (28)$$

gilt, tatsächlich gut approximiert. (27) ist also von (6) unabhängig gültig, falls nur (28) gilt. Gleichzeitig sehen wir, dass im Inneren des erwähnten Gebietes auch keine höhere Näherung nötig ist, da zusammen mit $u \rightarrow p$ auch (27) die exakte Eigenfunktion darstellt. Es ist also natürlich, dass die »erste Näherung« (27) oft besser ist als die »höheren« Näherungen. Andererseits aber gelangen wir zur Einsicht, dass (28) als recht unglücklich gewählt gelten muss, da u durch p nur auf einer verhältnismässig kleinen Strecke mit befriedigender Genauigkeit approximiert wird. Eine (27) bei weitem übertreffende, für das ganze Gebiet x gültige Näherung können wir durch jeden Ansatz

$$u \approx P$$

erhalten, der im Inneren des klassischen Bahngebietes p nahe kommt, ausser diesem Gebiet aber monoton abnimmt und gegen Null konvergiert. Dabei setzen wir voraus, dass für P die Quantenbedingung (26) gültig ist. Was die Quantenbedingung (26) betrifft, ist hier die Anwendung von (28) viel berechtigter, da auf Grund des Vorhergesagten

$$\int_a^\beta u dx \approx \int_{x_1}^{x_2} p dx = k \hbar \pi \quad (29)$$

gilt, wo x_1 und x_2 die Grenzen des klassischen Bahngebietes bedeuten ($a \leq x_1 < x_2 \leq \beta$).

Wie kann man nun entscheiden, mit welcher Genauigkeit (28) innerhalb des klassischen Bahngebietes gültig ist? Wenn wir für den Punkt $x_0, u(x_0) = p(x_0)$ voraussetzen, dann gilt gemäss (20) in einer Umgebung von x_0

$$v' = -v^2,$$

d. h.

$$v(x) = \frac{1}{\frac{1}{v(x_0)} - x_0 + x}.$$

Andererseits erhalten wir, indem wir hier den (19) entnommenen Ausdruck für v einsetzen

$$u = -\int \frac{2p dx}{\frac{1}{v(x_0)} - x_0 + x}. \quad (30)$$

Falls x_0 so gewählt werden kann, dass der aus (30) gewonnene Wert für u p in einer Umgebung von x_0 gut approximiert, so ist die Anwendung von (28) berechtigt.

4. Gehen wir jetzt zur Untersuchung der Existenz von (6) über. Nach (18) müssen für u und für v im Falle der Existenz von (6) offenbar folgende Reihenentwicklungen gültig sein :

$$\begin{cases} u = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u_\alpha \hbar^{2\alpha}, \\ v = \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta v_\beta \hbar^{2\beta}, \end{cases} \quad (31)$$

hier ist

$$u_\alpha = y_{2\alpha}, \quad v_\beta = y_{2\beta+1}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots . \quad (32)$$

Indem wir (31) in (19) einsetzen, erhalten wir die Relation

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta v_\beta \hbar^{2\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u'_\alpha \hbar^{2\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha u_\alpha \hbar^{2\alpha}}. \quad (33)$$

Da die u_α und die v_β von \hbar unabhängig sind, kann (33) nur bestehen, falls $u_0 = y_0 \neq 0$, d. h. $y_0 = \pm p \neq 0$ gilt. Ist $u_0 = 0$, so müssen in der Potenzreihe für v auch Potenzen mit negativen Exponenten auftreten, was mit dem Ansatz (6) bzw. mit dem Ansatz (31) in Widerspruch steht. Die Reihenentwicklung (6) kann also nur existieren, falls u_0 nirgends verschwindet. Da aber $u_0 = \pm p$ in Wirklichkeit auch Null sein kann, gelangen wir zu einem offensichtlichen Widerspruch. Die Schwierigkeit wird wieder dadurch verursacht, dass als »nullte Näherung« von u der klassische Impuls auftritt. Um die Relation (33) gültig zu erhalten, müssten wir Rekursionsformeln anwenden, die im Falle $u_0 = 0, u'_0 = 0$ ergeben. Natürlich erlaubt dies der Ansatz (6) nicht.

Aus den Elementen der Analysis ist es bekannt, dass die Reihe

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \left(\frac{\hbar}{i} \right), \quad (6)$$

in welcher y_l von $\frac{\hbar}{i}$ unabhängig ist, notwendigerweise mit der MacLaurinschen

Reihe von y übereinstimmt. Setzen wir y als bekannt voraus,

$$y = y \left(x, \frac{\hbar}{i} \right),$$

dann ergibt sich nach dem Gesagten

$$y_l(x) = \frac{d^l y \left(x, \frac{\hbar}{i} \right)}{d \left(\frac{\hbar}{i} \right)^l} \cdot \frac{1}{l!} \Big|_{\hbar=0}. \quad (34)$$

Da (34) nicht existiert, müssen wir das Verhalten von u und von v in der Umgebung von $\hbar = 0$ untersuchen. Vor allem muss hier auch die Abhängigkeit von p^2 von \hbar berücksichtigt werden, was man in dem Rahmen der W. K. B. Methode bisher ausser acht gelassen hat. Da u und u' auf die gleiche Weise von \hbar abhängig sind, sehen wir auf Grund von (19), dass v in der Umgebung von $\hbar = 0$ sich wie eine Konstante v_0 verhält. Gestattet also v eine Reihenentwicklung nach den Potenzen von \hbar , so haben wir

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \hbar^i. \quad (35)$$

Also gilt in (26)

$$\hbar^2 (v^2 + v') \rightarrow 0, \quad \text{falls} \quad \hbar \rightarrow 0.$$

In p^2 kann \hbar auch mit negativem Exponenten auftreten, und dies muss auch in u zum Ausdruck kommen. Im allgemeinen kann man nicht u , sondern $\hbar^n u$ in eine MacLaurinsche Reihe entwickeln :

$$u = \sum_{l=-n}^{\infty} u_l \hbar^l \quad (36)$$

und somit ist

$$E = \sum_{l=-2n}^{\infty} E_l \hbar^l. \quad (37)$$

Wir können verabreden, dass $E_0 = 0$ sein soll, und dass (37) im Falle, wo wir statt $2mE_0$ — $2mV$ schreiben, p^2 darstellen soll. Ausserdem werden wir zu E_l immer diejenigen Glieder von p^2 hinzunehmen, die \hbar^l enthalten. Der Wert von u hängt von der kleinsten Potenz ab, mit welcher \hbar in p^2 vorkommt. Die notwendige vorherige Information über die Abhängigkeit des E von \hbar können wir aus (29) erhalten. Aus (19) und aus (20) gewinnen wir auf Grund von (35) — (37) folgende Rekursionsformeln :

$$u'_l + 2 \sum_{j=0}^{l+n} u_{l-j} v_j = 0, \quad (l = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, 2, \dots) \quad (38)$$

$$2mE_l - \sum_{j=-n}^{n+l} u_{l-j} u_j = 0, \quad (l = -2n, -(2n-1), \dots, 0, 1) \quad (39)$$

$$v'_{l-2} + \sum_{k=0}^{l-2} v_{l-k-2} v_k + 2mE_l - \sum_{j=-n}^{n+l} u_{l-j} u_j = 0, \quad (l = 2, 3, \dots) . \quad (40)$$

Aus (39) folgt im Falle $l = -2n$ die Relation

$$u_{-n}^2 - 2mE_{-2n} = 0,$$

wenn also E_{-2n} (d. h. der \hbar^{-2n} enthaltende Teil von p^2) auch negative Werte annehmen kann, dann ist diese Methode nicht anwendbar. In diesem Falle wäre nämlich u_{-n} imaginär, und dass widerspricht der Definition von u , (u ist nämlich der reelle Teil von y). Das bedeutet, dass u in diesen Fällen an der Stelle $\hbar = 0$ eine wesentliche Singularität hat, und so auf keine Weise in eine MacLaurinsche Reihe entwickelt werden kann. (Dies ist z. B. für den linearen Oszillatator und für das H-Atom der Fall.) In solchen Fällen müssen wir darauf verzichten, u mit einer Methode vom W. K. B. Typus zu bestimmen. Trotzdem ist die Gleichung durch eine Reihenentwicklung vom W. K. B. Typus lösbar, falls wir unmittelbar die Lösung von (25) suchen. Indem wir an unserer, im Zusammenhang mit (37) getroffener Verabredung festhalten, haben wir

$$p^2 = 2m \sum_{i=-2(n-1)}^{\infty} E_i \hbar^i. \quad (41)$$

Die untere Grenze des Summationsindexes ist $-2(n-1)$, da η^2 noch mit \hbar^2 multipliziert ist. Es sei also

$$\eta = \sum_{i=-n}^{\infty} \eta_i \hbar^i. \quad (42)$$

Indem wir (41), (42) und die für η' aus (42) gewonnene Reihenentwicklung in (25) einsetzen, erhalten wir folgende Rekursionsformeln :

$$\sum_{j=-n}^{i+n} \eta_{i-j} \eta_j + 2mE_{i+2} = 0, \quad i = 2n, \dots, -(n-1). \quad (43)$$

$$\sum_{j=-n}^{i+n} \eta_{i-j} \eta_j + \eta'_i + 2mE_{i+2} = 0, \quad i \geq -n. \quad (44)$$

Das bei der Rekursion (38)–(40) auftretende Problem kann auch hier zum Vorschein kommen. Aus (43) erhalten wir nämlich im Falle $i = -2n$:

$$\eta_{-n}^2 = -2mE_{-2(n-1)},$$

woraus sich η_{-n} nur im Falle eines negativen $E_{-2(n-1)}$ reell ergibt. Andernfalls existiert die Rekursion (43)–(44) nicht. Wir sehen also, dass entweder nur u oder nur η mit Hilfe einer Reihenentwicklung vom W. K. B. Typus bestimmbar ist, dass also einer der beiden Größen u und η an der Stelle $\hbar = 0$ eine wesentliche Singularität hat. Eine der beiden Möglichkeiten ist aber immer vorhanden, und konvergiert zur exakten Lösung. Ist die Funktion u , mit deren Hilfe man die Quantelung durchführen kann, durch eine Reihenentwicklung des W. K. B. Typus nicht bestimmbar, so sind wir auf die Näherung (29) angewiesen. Mit deren Hilfe kann man zumindest entscheiden, für welche i $E_i = 0$ bzw. $E_i \neq 0$ gilt. Es wird eine der wichtigsten Aufgaben der weiteren Forschungen sein, eine durch $|p$ (oder etwa durch η) formulierbare Quantenbedingung zu finden, die die quantenmechanischen Energieeigenwerte auch in quantitativ zutreffender Weise beschreibt.

5. Um den tatsächlich divergenzfreien Charakter der vorgeschlagenen Methode zu illustrieren, werden wir jetzt die Schrödingerschen Gleichungen des linearen Oszillators und des H-Atoms untersuchen. Wir wählen diese beiden Beispiele, weil diese auch einer exakten Lösung fähig sind, und darum auch in anderen Fällen zur Illustration der Leistungsfähigkeit von Methoden des W. K. B. Typus herangezogen werden.

Vor allem trachten wir danach, die zum Eigenwert $\frac{1}{2}h\nu$ des linearen Oszillators gehörenden irregulären Lösungen zu bestimmen. Wegen

$$2mV = (2\pi m\nu x)^2$$

haben wir gemäss (39)

$$u_0 = \sqrt{-1} \cdot 2\pi m\nu x$$

und das widerspricht der Definition von u , wonach u reell ist. Ähnlich verhält es sich auch beim H-Atom :

$$u_{-1}^2 = 2mE_{-2} < 0.$$

η hingegen kann in beiden Fällen leicht bestimmt werden.

Laut (29) gilt für den linearen Oszillator

$$\begin{cases} 2mE_0 = (2\pi m\nu x)^2, \\ 2mE_1 \neq 0, \\ E_i = 0, \quad i \neq 0, 1. \end{cases} \quad (45)$$

Auf Grund von (43)–(44) ist also

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{-1}^2 = (2\pi m v x)^2, \\ 2\eta_{-1} \eta_0 + \eta'_{-1} + 2mE_1 = 0, \\ \eta_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i \eta_{i-j} \eta_j + \eta'}{2\eta_{-1}}. \end{array} \right. \quad (46)$$

Hieraus können die η_i bestimmt werden :

$$\begin{aligned} \eta_{-1} &= \pm 2\pi m v x, \quad \eta'_{-1} = \pm 2\pi m v, \\ \eta_0 &= \pm \frac{\pm 2\pi m v + 2mE_{-1}}{2\pi m v x}. \end{aligned}$$

Also wird η_0 an der Stelle $x = 0$ bereits im Grundzustand unendlich, was mit den Nebenbedingungen unvereinbar ist. Der Widerspruch fällt nur weg, falls wir den Zähler von η_0 identisch gleich Null, also

$$\eta_0 = 0, \quad E_1 = \pm \pi v, \quad \eta'_0 = 0$$

setzen. Aus dem Gesagten ist es ersichtlich, dass auch die anderen η_i verschwinden. Auch ist es offenbar, dass in dem Ausdruck für η_{-1} nur das negative Vorzeichen berücksichtigt werden darf. Somit haben wir schon die Lösung des Problems :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\eta_{-1}}{\hbar} = -\frac{2\pi m v x}{\hbar}, \\ E &= E_1 \hbar = \frac{\hbar}{2} v. \end{aligned}$$

Im Grundzustand des H-Atoms spezialisiert sich (43)–(44) folgendermassen $\left(n = -2, E_{-2} \neq 0, E_1 = 0, E_0 = \frac{Zc^2}{r}, E_i = 0 \right)$:

$$\begin{aligned} \eta_{-2} + 2mE_{-2} &= 0, \quad \eta_{-2} = \text{konst}, \quad \eta'_{-2} = 0, \\ 2\eta_{-1} \eta_{-2} &= 0, \quad \eta_{-1} = 0, \quad \eta'_{-1} = 0, \\ 2\eta_{-2} \eta_0 + \frac{2mZe^2}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man für die, unseren Bedingungen genügeleistende, Lösung

$$\eta_{-2} = -mZe^2,$$

$$\eta_0 = \frac{1}{r},$$

$$E_{-2} = -\frac{mZ^2e^4}{2},$$

d. h.

$$\eta = -\frac{mZ^2e^2}{\hbar} + \frac{1}{r}, \quad E = -\frac{mZ^2e^4}{2} \frac{1}{\hbar^2}.$$

Diese beiden Beispiele zeigen, dass man unter Berücksichtigung der oben angeführten Gesichtspunkte tatsächlich ein konvergentes Verfahren erhält. Zugleich wird es aber klar, dass diese Methode viel mehr Umsicht verlangt, als die ursprüngliche W. K. B. Methode. Das neue Verfahren eignet sich viel weniger zu einer Zerlegung in mechanisch durchführbare Schritte. Dies ist aber kein Mangel der neuen Methode, sondern eine notwendige Folge der Beschaffenheit des Problems.

LITERATUR

1. G. Wentzel, Z. Phys. **38**, 518, 1926.
2. H. A. Kramers, Z. Phys. **39**, 828, 1926.
3. L. Brillouin, C. R. **183**, 24, (1926); Journ. Phys. **7**, 353, 1926.
4. A. Zwaan, Arch. Néerl. des Sciences **12**, 33 (1929).
5. E. C. Kemble, Phys. Rev. **47**, 426, 1935; Phys. Rev. **48**, 560, 1935.
6. R. E. Langer, Phys. Rev. **51**, 669, 1937.
7. S. C. Miller, Jr—Good., R. H. Jr: Phys. Rev. **91**, 174, 1953.
8. L. De Broglie, Einführung in die Wellenmechanik. Leipzig, AVG, 1929.
9. I. Fényes, Z. Phys. **132**, 81, 1952.
10. K. Novobátzky, Ann. d. Phys. **9**, 406, 1951.
11. O. Halpern, Phys. Rev. **87**, 389, 1952.
12. L. A. Young, Phys. Rev. **38**, 1612, 1931.

О ПРОБЛЕМЕ РАСХОДИМОСТИ МЕТОДА В. К. Б.

И. ФЕНЬЕШ

Резюме

Автором было показано, что расходимость метода В. К. Б. обусловлена внутренним противоречием. Это внутреннее противоречие связано с тем, что метод В. К. Б. ищет решения уравнения Шредингера, исходя из классической механики (нулевое приближение). Движение по классической механике имеет «точку поворота», отличающуюся от «точки поворота» нерегулярного квантово-технического решения. Это различие не исключается учетом более высоких приближений. Противоречие выражается математически в том, что разложение в ряд по методу В. К. Б. не существует. Было показано, что, применяя разложение, имеющее существование, и обращая внимание на зависимость собственных значений E от \hbar , можно исключить расходимость метода. Было указано, почему получаются хорошие результаты в некотором интервале даже из первого приближения по методу В. К. Б. В заключение обсуждается вопрос о возможностях и пределах применимости общего правила квантования.

A NEW METHOD FOR THE CALCULATION OF THE ENERGY OF THE HYDROGEN MOLECULE

By

F. BERENCI

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS, UNIVERSITY OF SZEGED, SZEGED

(Presented by P. Gombás — Received 22. V. 1954.)

The binding energy of the normal hydrogen molecule has been calculated by means of the variational method modifying the correlated molecular orbital method by introducing into the wave function a new variational parameter determining the ratio between the atomic and ionic functions. The new wave function, in which both the atomic and ionic configurations are taken into account, has the following form

$$\psi = [a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu (a_1 a_2 + b_1 b_2)] (1 + pr_{12})$$

where a_1 , b_1 , a_2 and b_2 are 1s atomic wave functions of electrons 1 and 2 centered about nuclei a and b , r_{12} is the interelectronic distance. The dissociation energy calculated by this method was found to be 4,14 ev with the values of parameters $z = 1,248$, $\mu = 0,356$ and $p = 0,073$ in atomic units. Comparing this value with the result obtained by the correlated molecular orbital method, we see that the present calculation gives a better value by 0,03 eV. The deviation from the experimental value is about 12 per cent.

Introduction

In the investigation of the structure of matter the most important task is to clear up the problem of the chemical binding of the molecule. One of the greatest successes of quantum mechanics consists in providing some fruitful methods for the theoretical investigation of molecules. In the case of more complicated molecules the calculations are extremely intricate because of the mathematical difficulties involved, therefore we are dependent on the use of relatively simple methods of approximation. So as to judge the reliability of the particular method of approximation used, it is best to carry out the calculations for the H_2 molecule, because here the problem is relatively simple and thus the calculations can be carried out exactly. The most usual procedure for the theoretical determination of the dissociation energy is the variational method, which consists in the minimization of the expression

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau}$$

by varying different parameters. Various authors used different wave functions and different variable parameters for their calculations. Table I contains the calculations carried out so far for the H_2 molecule in the ground state. The names of the authors, the wave functions, and the variable parameters are listed.

TABLE I

Author	Wave function	D eV	R atomic	<i>z</i>	<i>p</i>	μ
1. H. Hellmann	$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$	2,65	1,6	1,—		
2. Y. Sugiura	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,14	1,51	1,—		
3. C. W. Scherr	$a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$ *(atomic $z = 1$, ionic $z = 0,6875$)	3,44	1,49	*		0,214
4. C. A. Coulson	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,47	1,38	1,193		
5. C. A. Coulson	$e^{-\rho\lambda}(1 + a\mu^2 + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda\mu^2)$	3,60	1,38			
6. S. C. Wang	$a_1 b_2 + a_2 b_1$	3,76	1,43	1,166		
7. S. Weinbaum	$a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,—	1,46	1,193		0,256
8. N. Rosen	$a_1 b_2(1 + \sigma Z_{a_1})(1 + \sigma Z_{b_2}) +$ $+ a_2 b_1(1 + \sigma Z_{a_2})(1 + \sigma Z_{b_1})$	4,02	1,46	1,190		
9. S. Weinbaum	$a_1 b_2(1 + \sigma Z_{a_1})(1 + \sigma Z_{b_2}) +$ $+ a_2 b_1(1 + \sigma Z_{a_2})(1 + \sigma Z_{b_1}) +$ $+ \mu(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,10	1,46	1,190		0,175
10. A. Frost—J. Braunstein	$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(1 + pr_{12})$	4,11	1,34	1,285	0,28	
11. E. F. Gurnee—J. L. Magee	$(z^3/\pi)^{1/2} [\exp(-zr_{c_1} - zr_{d_2}) +$ $+ \exp(-zr_{c_2} - zr_{d_1})]$	4,15	1,46	1,172		
12. C. R. Mueller—H. Eyring	$(a_1 + \lambda b_1)(\lambda a_2 + b_2) +$ $+ (a_2 + \lambda b_2)(\lambda a_1 + b_1)$	4,20				
13. J. O. Hirschfelder—J. W. Linnet	$a_1 b_2 [1 + (az^2)(x_{a_1} x_{b_2} + y_{a_1} y_{b_2}) +$ $+ (\beta z^2)(Z_{a_1} Z_{b_2})] +$ $+ a_2 b_1 [1 + (az^2)(x_{a_2} x_{b_1} +$ $+ y_{a_2} y_{b_1}) + (\beta z^2)(Z_{a_2} Z_{b_1})] +$ $+ \gamma(a_1 a_2 + b_1 b_2)$	4,25	1,43	1,195		
14. H. M. James—A. S. Coolidge	$\exp[-\delta(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{klmnp} C_{klmnp}]$ $\left[\lambda_1^k \lambda_2^l \mu_1^m \mu_2^n \left(\frac{2r_{12}}{R} \right)^p + \right.$ $\left. + \lambda_1^l \lambda_2^k \mu_1^m \mu_2^n \left(\frac{2r_{12}}{R} \right)^p \right]$	4,72	1,4			

Method of calculation

Frost and Braunstein [I, 9] calculating the binding energy of the normal H_2 molecule, introduce the interelectronic distance in the wave function in such a way that the molecular orbital was supplemented with the correlating factor and the calculations were performed with the correlated molecular orbitals. The wave function has therefore the following form

$$\psi = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(1 + pr_{12})$$

where a_1, a_2, b_1 and b_2 are 1s atomic wave functions of electrons 1 and 2 centered

about nuclei a and b , r_{12} is the interelectronic distance, p is the varying parameter together with the effective charge z . With the correlated molecular orbitals the dissociation energy was found to be 4,11 eV.

We extended this method here using the idea of *Weinbaum* in so far as we employed a variational parameter, which gives the ratio of the homeopolar part to the ionic part in the wave function. The new wave function is therefore the following

$$\psi = (\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{12}); \quad (1)$$

where φ means the homeopolar part of the wave function and χ the ionic part

$$\varphi = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad (2)$$

$$\chi = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

The number of variational parameters compared to the previous method is increased by the parameter u , thus we are working with a three parameter method in the determination of the binding energy. Varying the parameters p , z and u we must determine the minimum of the following expression

$$E = \frac{\int (\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{12}) H(\varphi + \mu\chi)(1 + pr_{22}) d\tau}{\int (\varphi + \mu\chi)^2 (1 + pr_{12}) d\tau}. \quad (3)$$

Taking into account the following form of the Hamiltonian

$$H = - \left[\frac{1}{2} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{R} \right],$$

the above expression can be written as

$$E = \frac{A + 2pB + p^2C}{I_0 + 2pI_1 + p^2I_2} + \frac{1}{R}, \quad (4)$$

where

$$A = K_0 - P_0 + I_{-1},$$

$$B = K_1 - P_1 + I_0, \quad (5)$$

$$C = K_2 - P_2 + I_1;$$

$$\begin{aligned}
 K_0 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) d\tau, \\
 K_1 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) r_{12} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) d\tau, \\
 K_2 &= -\frac{1}{2} \int (\varphi + \mu\chi) r_{12} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) (\varphi + \mu\chi) r_{12} d\tau;
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 \left(\frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} \right) d\tau, \\
 P_1 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12} \left(\frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} \right) d\tau, \\
 P_2 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12}^2 \left(\frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{a2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{b2}} \right) d\tau;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$I_{-1} = \int (\varphi + \mu\chi)^2 \frac{1}{r_{12}} d\tau, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 d\tau, \\
 I_1 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12} d\tau, \\
 I_2 &= \int (\varphi + \mu\chi)^2 r_{12}^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{9}$$

In order to find the minimum of E we first determined the value of p which minimizes E for fixed R and μ . This is possible, because the values of A, B, C, I_0, I_1 and I_2 in the expression of E are functions of R and μ , consequently for given R and μ the value of p minimizing E can be ascertained by the determination of the extremum with respect to p . This procedure facilitates and accelerates the calculations because the third degree terms in p drop out of the expression $\frac{\partial E}{\partial p} = 0$ and thus for given R and μ we have the following mixed second degree equation

$$(CI_1 - BI_2)p^2 + (CI_0 - AI_2)p + BI_0 - AI_1 = 0, \tag{10}$$

from where

$$p = \frac{AI_2 - GI_0 \pm \sqrt{(CI_0 - AI_2)^2 - 4(CI_1 - BI_2)(BI_0 - AI_1)}}{2(CI_1 - BI_2)}. \tag{11}$$

The second step consists in the varying of z and μ (for fixed R) and subsequently the minimization with respect to p for each z and μ value.

The minimum of E was to be expected about $R = 1,35$. Therefore we determined with the method mentioned above the smallest value of E in the neighbourhood of the expected minimum namely in the three points $R = 1,31$, $1,34$ and $1,37$. Then we plotted the following Morse curve through the three points :

$$\Delta E = D e^{-2a(R-R_m)} - 2D e^{-a(R-R_m)},$$

which gives exactly the dissociation energy D and the internuclear distance R_m .

Results of calculations

The calculation with the correlated molecular orbitals modified by μ gave for the energy of the H_2 molecule in the ground state — 1,152 atomic units of energy. This corresponds to a binding energy of 4,14 electron volts. For the internuclear distance this method gave the value, 1,338 also in atomic units, the remaining two variational parameters were found to be $\mu = 0,356$ and $p = 0,073$. Comparing the results obtained with the present method with those of Weinbaum and of Frost-Braunstein, we see that the wave function of the method used by us differs from that of Weinbaum in the correlated factor and from that of Frost-Braunstein in the variation of μ . The results of the various methods are listed in table II.

TABLE II

	Dev	R atomic	z	μ	p
Weinbaum	4	1,46	1,193	0,256	0
Frost—Braunstein	4,11	1,34	1,825	1,—	0,28
Present paper	4,14	1,338	1,248	0,356	0,073
Experimental data [III]	4,72	1,4			

From Table II we see that the result of the present calculation is 0,14 eV better than that of Weinbaum and 0,03 ev than that of Frost—Braunstein. Considering that the variation of μ improves the binding energy only by 0,03 eV, it follows that the introduction of r_{12} into the wave function is a very good idea, because this alone adds 0,11 eV to the dissociation energy compared to Weinbaum's result. Therefore it would be worth while to extend the calculations by completing the wave function of Weinbaum given in [I, 9] adding to it

the correlated factor. The result of the present calculations differs by 12 per cent from the experimental value. It is interesting to mention that the introduction of the correlated factor increases the ionic part in the wave function by 39 per cent, in the calculations of Weinbaum the value of μ being 0,256, ours, however, 0,356. With the variation of μ the correlated factor decreases to about a quarter of its former value. Without variation of μ ($\mu = 1$) Frost and Braunstein found the value of p to be 0,28, the present calculations give 0,073.

The writer wishes to thank Dozent Rezső Pauncz for suggesting the problem and Géza Alló for his help in carrying out the numerical calculations.

REFERENCES

I.

1. Hellman, Einführung in die Quantumchemie (Franz Deuticke, Leipzig, 1937 P. 138).
2. Y. Sugiura, Z. Physik **45**, 484, 1927.
3. C. W. Scherr, J. Chem. Phys. **22**, 149, 1954.
4. C. A. Coulson, Trans. Faraday Soc. **33**, 1479, 1937.
5. C. A. Coulson, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 204, 1938.
6. S. C. Wang, Phys. Rev. **31**, 579, 1928.
7. 9. S. Weinbaum, J. Chem. Phys. **1**, 317, 593, 1933.
8. N. Rosen, Phys. Rev. **38**, 255, 2099, 1931.
10. A. Frost—J. Braunstein, J. Chem. Phys. **19**, 1133, 195.
11. E. F. Gurnee—J. L. Magee, J. Chem. Phys. **18**, 142, 1950.
12. C. R. Mueller—H. Eyring, J. Chem. Phys. **19**, 1495, 1951.
13. J. O. Hirschfelder—J. W. Linnet, J. Chem. Phys. **18**, 130, 1950.
14. H. M. James—A. S. Coolidge, J. Chem. Phys. **1**, 825, 1933.

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ВОДОРОДНОЙ МОЛЕКУЛЫ

Ф. БЕРЕНЦ

Резюме

Энергия связи нормальной водородной молекулы была вычислена с помощью вариационного метода. Введением нового вариационного параметра, определяющего отношение атомных и ионных волновых функций, было сделано некоторое видоизменение корреляционного метода молекулярных орбит. Новая волновая функция, в которой и атомная и ионная волновые функции были учтены, имеет следующий вид:

$$\psi = [a_1 b_2 + a_2 b_1 + \mu (a_1 a_2 + b_1 b_2)] (1 + pr_{12})$$

Энергия диссоциации, рассчитанная по этому методу, — 4,14 ЭВ при следующих значениях параметров: $Z = 1,248$, $\mu = 0,356$ и $p = 0,073$ в атомных единицах. Сравнивая этот результат с результатами, полученными с помощью корреляционного метода молекулярных орбит, выясняется, что наш результат дает лучшее значение на 0,03 ЭВ. Отклонение от экспериментального значения составляет около 12 процентов.

ON THE QUANTUM STATISTICS OF NUCLEONS

By

G. SZAMOSI

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 2. VI. 1954.)

A few characteristic details of the excited states of the nucleus are investigated in the simplest case. On the basis of the assumption of a repelling interaction of short range between the nucleons, a »self-volume« corresponds to the nucleon. The existence of the self-volume modifies the formulae of ordinary Fermi statistics. Better agreement with experience than hitherto is obtained for the excited states of nuclei.

I

Ever since high energy scattering experiments yielded more detailed information on the character of the forces acting between nucleons, nuclear physics has faced two serious problems. These are the questions as to the reason for the saturation of binding energy and density of the nucleus, and the charge-independence of the nuclear forces. As is well-known, the assumption of a very intensive repulsion of short range between the nucleons brings us nearer to a solution of both these problems. This hypothesis was first put forward by *R. Jastrow* [1] on a completely phenomenological basis; recently *Werle* [2] showed with the help of relativistic mechanics that the appearance of such a repulsion can be accounted for theoretically as well.

A repelling interaction results in many remarkable consequences. First of all it considerably changes the kinetic energy of nucleons at absolute zero. It is in particular here that the effect of the repelling interaction on the saturation becomes evident. In an earlier paper [3] we pointed out this effect of the kinetic energy.

Our present aim is the examination of the influence of the repelling interaction on the excited states of the nucleus. First of all we summarize the formulae applying to the ground state. A simple calculation shows that, denoting with r_n the effective repulsion radius and with v_n the volume of the corresponding repulsive core, we have for the total kinetic energy of a fermion gas consisting of N particles contained in a volume V at absolute zero

$$E_{\text{kin}} = \frac{\kappa}{v_n^{2/3}} \int_0^N \log^{2/3} \left(1 - \frac{nv_n}{V} \right) dn, \quad (1)$$

where

$$\varkappa = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{8m} \quad (2)$$

and m is the nucleon mass. (Here we took the mass of proton and neutron to be the same.) Introducing the new variable

$$x = \log \left(1 - \frac{Nv_n}{V} \right)$$

we have instead of (1)

$$E_{\text{kin}} = \frac{kV}{v_n^{5/3}} \int_0^{-\log \left(1 - \frac{Nv_n}{V} \right)} x^{2/3} e^{-x} dx.$$

The integral here is an incomplete Γ -function. Assuming $Nv_n \ll V$, an assumption probably fulfilled by the conditions prevailing in the nucleus, we arrive with the help of an expansion at a simpler expression for the kinetic energy :

$$E_{\text{kin}} = \varkappa \left(\frac{3}{5} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} + \frac{1}{8} \frac{v_n}{V} \frac{N^{8/3}}{V^{2/3}} \right).$$

From this equation is evident that for $v_n \rightarrow 0$ we get the well-known expression for the kinetic energy of an ordinary Fermi gas at absolute zero.

For the sake of what follows later on we note a few characteristics expressions.

a) The number of particles out of n particles contained in a volume V , whose momenta are between p and $p + dp$, taking the spin into account, is given by

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} (V - Nv_n) p^2 dp.$$

From this we immediately obtain the maximum momentum as

$$p_{\text{max}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{v_n^{1/3}} \log^{1/3} \left(1 - \frac{Nv_n}{V} \right).$$

Thus for the maximum kinetic energy we have :

$$E_{k, \text{max}} = \frac{k}{V_n^{2/3}} \log^{2/3} \left(1 - \frac{Nv_n}{V} \right). \quad (3)$$

This expression becomes in the approximation used here :

$$E_{k, \max} = \pi \frac{N^{2/3}}{V^{2/3}} \left(1 + \frac{v_n}{3} \frac{N}{V} \right).$$

b) We note further the following expression which can easily be derived for the kinetic energy

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{5} \beta V E_{k, \max}^{1/2} \left[1 - \frac{5}{12} \beta v_n E_{k, \max}^{3/2} \right], \quad (4)$$

where

$$\beta = 4\pi (2m)^{3/2} h^{-3}.$$

II

In the following we consider arbitrary temperatures. Our considerations are somewhat simplified by the fact that the distribution function connecting the number of particles with the cells available in the phase space does not influence the finite value the »self-volume« v_n which represents the repulsion. We can thus simply apply the distribution function $f(\varepsilon)$ for the energy distribution of the ordinary Fermi statistics :

$$f(\varepsilon) = \left[\exp \frac{\varepsilon - \zeta}{\tau} + 1 \right]^{-1},$$

where ζ is the usual thermodynamical potential and τ the energy parameter corresponding to the temperature. Thus we obtain after a simple calculation for the number of particles :

$$N = \frac{V}{v_n} \left\{ 1 - \exp \left[-\beta v_n \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \right\}.$$

Limiting ourselves to small exciting energies, we can expand the exponential function and get :

$$N = \beta V \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{V v_n}{2} \beta^2 \left[\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon \right]^2.$$

(The justification for the expansion is evident from considerations further

below.) Restricting ourselves to low temperatures in the following as well we can use the well-known Sommerfeld formulae. With their help we can write for the number of particles :

$$N = \frac{2}{3} \beta V \zeta^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\tau}{\zeta} \right)^2 \right] - \frac{2V}{9} v_n \beta^2 \zeta^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\tau}{\zeta} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

We mention here that if we express the potential ζ by the value of $E_{k, \max}$ obtained in the case of $\tau = 0$, with the approximation used here we get the same formula as in the ordinary Fermi statistics, i. e.

$$\zeta = E_{k, \max} \left(1 - \frac{\pi^2 \tau^2}{12} \frac{1}{E_{k, \max}^3} \right). \quad (6)$$

Using this expression for ζ the expression (5) becomes after a simple calculation :

$$N = \frac{2}{3} \beta V E_{k, \max}^{3/2} - \frac{2}{9} \beta^2 v_n E_{k, \max}^2.$$

Our next task is the calculation of the energy, for which the function $n(\varepsilon)$, i. e. the number of particles as function of energy must be known. A short calculation yields

$$n(\varepsilon) = \frac{V}{v_n} \left[1 - \exp \left(-\beta v_n \int_0^\varepsilon \eta^{1/2} f(\eta) d\eta \right) \right].$$

From this follows easily with the help of the above expansion :

$$E = \beta V \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon - \beta^2 V v_n \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \eta^{1/2} f(\eta) d\eta d\varepsilon.$$

Sommerfeld estimated the first integral for the case of low temperatures. Using his approximation it is not difficult to give an estimate for the second integral as well. [4]. We obtain after a rather tedious though simple calculation with help of (6) the following expression for the energy in a suitable form :

$$E = \beta V \left\{ \frac{2}{5} E_{k, \max}^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{\tau}{E_{k, \max}} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{6} v_n E_{k, \max}^4 \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{\tau}{E_{k, \max}} \right)^2 \right] \right\}.$$

III

We now turn to the determination of the number of niveaus belonging to a given energy interval. The excitation energy Q is defined by

$$Q(\tau) = E(\tau) - E(0).$$

Using (4) and (7) we obtain for $Q(\tau)$:

$$Q(\tau) = \beta V \frac{\pi^2}{6} \tau^2 \left(E_{k, \max}^{1/2} - \frac{2\beta}{3} v_n E_{k, \max}^2 \right).$$

For the entropy S we get thus, $dS = \delta Q/T$,

$$S = k \left(\frac{2QV\beta}{3} \right)^{1/2} \pi \left(E_{k, \max}^{1/4} - \frac{\beta v_n}{3} E_{k, \max}^{7/4} \right), \quad (8)$$

where k is the Boltzmann constant.

With the expression for the entropy and the relation $S = k \log J$, we easily obtain for the thermodynamic probability J using (8) :

$$J = \exp \left[\pi \left(\frac{2QV\beta}{3} \right)^{1/2} \left(E_{k, \max}^{1/4} - \frac{\beta v_n}{3} E_{k, \max}^{7/4} \right) \right].$$

If we express β with help of (3) by the total number N of particles we get after some calculation :

$$J = \exp \left[\pi (NQ)^{1/2} E_{k, \max}^{-1/2} \left(1 - \frac{Nv_n}{4V} \right) \right].$$

We can now apply our results to the nucleus. Consider the nucleus to be a Fermi gas consisting of Z protons and N neutrons. The excitation energy Q is composed of the excitation energies of the neutrons and protons. Thus

$$Q = Q_Z + Q_N.$$

From this we get for the total level density [5] :

$$\varrho(Q) = \frac{1}{48} \int J_Z J_N \frac{dQ_Z}{Q_Z Q_N}.$$

As the result of a simple but rather lengthy calculation we obtain for the integral :

$$\varrho(Q) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{12} \frac{[(2Q)^{1/2}\gamma]^{-1/2}}{Q} e^{\sqrt{2Q}\gamma}, \quad (9)$$

where

$$\gamma = \pi \left(\frac{N}{E_{k,\max}^N} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{Nv_n}{4V} \right) \approx \pi \left(\frac{Z}{E_{k,\max}^Z} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{Zv_n}{4V} \right).$$

Here $E_{k,\max}^Z$ and $E_{k,\max}^N$ denote the maximum kinetic energy values of a Fermi gas at absolute zero consisting of protons or neutrons, respectively. We assume the value of v_n to be the same for every nucleon. Introducing

$$\xi = \sqrt{2Q}\gamma,$$

we obtain for $\varrho(Q)$ with help of (9) :

$$\varrho(Q) = 0,209 \frac{1}{Q} \frac{e^\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

For simplicity we consider symmetrical nuclei, where $2N = 2Z = A$. Taking further into account that according to experience for heavy nuclei

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \left[R = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}; \quad r_0 = 1,42 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \right],$$

we get for $\varrho(Q)$, denoting the ratio r_n/r_0 by y :

$$\varrho(Q) = 0,209 \frac{1}{Q} \frac{\exp [a(AQ)^{1/2}g(y)]}{[a(AQ)^{1/2}g(y)]^{1/2}}, \quad (10)$$

where

$$g(y) = \left(1 - \frac{y^3}{8} \right) \left(1 - \frac{y^3}{3} \right)^{1/2}$$

and

$$a = \frac{2^{1/3}\pi}{\pi^{1/2}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} r_0$$

or with help of (2) :

$$a = 2 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} r_0.$$

IV

The main purpose of our considerations was to determine equation (10). Experimental physics can already give the distances of excitation niveaus in a given energy interval for numerous nuclei. The mean niveau density naturally depends strongly on the nature of the reaction producing the excitation, if only because of the angular momentum relation. We have here taken no account of the angular momentum relation between incident particle and nucleus. There is no point in such an exact calculation because of our inexact knowledge of the repulsive core. We can, however, state that the mean niveau distance for medium heavy nuclei is of the order of magnitude eV. At a given energy we have the following connection between the mean niveau distance D and the niveau density: $\varrho D = 1$.

As is well-known, *Bethe* in 1936 determined the mean niveau distance without considering the repelling interaction [5]. His calculations yielded for a medium heavy nucleus ($A = 110$) at medium excitation energy ($Q = 8$ MeV) for D 0,4 eV. According to experience this value is too small, its real value being several eV. The following small table shows the values for D as a function of the repulsive core for the mentioned values of A and Q .

$r_n \cdot 10^{18}$ cm	D eV	ξ
0,4	1,28	18,67
0,6	1,73	18,37
0,8	3,05	17,79
<i>Bethe:</i> 0,0	0,4	20,0

It is evident that the assumption of a repelling interaction leads, as regards the order of magnitude, to a better agreement with experience for the mean niveau distance.

LITERATURE

1. *R. Jastrow*, Phys. Rev. **81**, 165, 1951.
2. *J. Werle*, Bull. Acad. Pologne I, 281, 1954.
3. *G. Szamosi*, First Hungarian Physical Congress. (Magyar Fizikai Folyóirat, to be published.)
4. *A. Békéssy*, KFKI Közlemények, 1954.
5. *H. A. Bethe*, Phys. Rev. **50**, 332, 1936.

О КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ НУКЛЕОНОВ

Г. САМОШИ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются в простейшем случае характерные данные возбужденных атомных ядер. Основным предположением работы является существование короткодействующего отталкивающего взаимодействия между нуклонами, которое учитывается с помощью «собственного объема» нуклонов.

С существованием собственного объема изменяются формулы статистики Ферми. Для возбужденных состояний ядер получено лучшее согласие с опытом, чем в ранее известных работах.

EIN STRÖMUNGSMODELL DER WELLENMECHANIK

Von

HERBERT W. FRANKE, Erlangen

(Vorgelegt von L. Jánossy. — Eingegangen: 31. VIII. 1954)

Es wird ein deterministisches Modell der Wellenmechanik, nämlich das hydrodynamische, betrachtet. Die Frage der in der Wellenmechanik auftretenden Operatoren und der ihnen entsprechenden physikalischen Größen des hydrodynamischen Modells wird untersucht und es werden einige Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen dieses Modells gegeben.

I

Als *Schrödinger* 1926 mit den ersten Arbeiten zur Wellenmechanik an die Öffentlichkeit trat, war das Erstaunliche, ja das Erschreckende daran nicht so sehr die Quantisierung als der Anschein eines völligen Bruchs mit klassischen Anschauungen, der nicht nur in neuen Gesetzmäßigkeiten sondern auch im Auftreten neuer Größen, Wellenfunktionen und Operatoren, zum Ausdruck kam. Bisher war die physikalische Entwicklung einem steten Gang gefolgt; sogar die *Einstinsche Relativitätstheorie*, die kurz zuvor noch die Gemüter erhitzt hatte, erwies sich zwar als eine grossartige Verallgemeinerung des physikalischen Weltbildes, aber eben doch nur als eine Erweiterung, in die sich das Althergebrachte widerstandslos einfügte. Ganz anders die ersten Schritte auf wellentheoretischem Grund. Es gelang zunächst weder — trotz angestrengter Bemühungen von kompetentester Seite — der Anschluss an die Endpunkte des bisherigen physikalischen Vordringens, noch waren die weiteren Gehversuche zum Straucheln verurteilt. Im Gegenteil: Schlag auf Schlag konnte man mit neuen Erfolgen aufwarten — die Vereinigung mit der *Heisenbergschen Quantenmechanik* die *Diracsche Theorie*. Dadurch waren die Grundfesten der Wellenmechanik so weit fundiert, dass es fast überflüssig wurde, auch weiterhin nach der Brücke zum klassischen Boden zu suchen. Die Trennungslinie blieb bestehen, wenn auch als Schönheitsfehler im Gebäude der exakten Naturwissenschaften.

Erst in den letzten Jahren hat sich die Sachlage geändert. Der Verwachungsprozess setzte unbeachtet und im Stillen ein, aber dass — wie schon so oft in der Geschichte der Wissenschaften — mehrere Autoren fast gleichzeitig zum selben Ergebnis gekommen sind, [1, 2, 3, 4] beweist das Bedürfniss nach diesem Vereinigungsschritt.

Was ist gelungen? Nicht mehr und nicht weniger als eine Umformung der wellenmechanischen Grundgleichungen, die die Wellenmechanik als Erweiterung des klassischen Rechenapparates entlarven.

Folgen wir *W. Glaser*, dem die Verschmelzung wohl als erstem geglückt ist. Dies geschah durch Einführung eines dichteabhängigen Gliedes

$$Z = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \quad (1)$$

in die *Hamilton—Jacobi*sche Gleichung

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } W + e\mathfrak{A})^2 + U + \frac{\delta W}{\delta t} = 0. \quad (2)$$

Die so entstandene Beziehung

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } W + e\mathfrak{A})^2 + U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} + \frac{\delta W}{\delta t} = 0 \quad (3)$$

zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{m} \text{div} \{ \varrho (\text{grad } W + e\mathfrak{A}) \} + \frac{\delta \varrho}{\delta t} = 0 \quad (4)$$

ist mit der *Schrödinger*gleichung

$$\Delta \psi + \frac{2i}{\hbar} e \mathfrak{A} \text{grad } \psi - \frac{e^2}{\hbar^2} \mathfrak{A}^2 \psi - \frac{2m}{\hbar^2} U \psi + \frac{2im}{\hbar} \frac{\delta \psi}{\delta t} = 0 \quad (5)$$

identisch, wenn man die Bezeichnung

$$\psi = \sqrt{\varrho} e^{i \frac{W}{\hbar}} \quad (6)$$

einführt. Zusätzlich gilt die Normierungsbedingung

$$\int \psi \bar{\psi} d\tau = \int \varrho d\tau = 1. \quad (7)$$

II

Dies ist eine rein formale mathematische Umformung, die jedoch zu weiteren Schritten anregt. Die *Hamilton—Jacobi*sche Gleichung schliesst bekanntlich die Prinzipien der klassischen Mechanik in sich ein. Hat man einmal ihre Gültigkeit — wenn auch mit Zusatzglied — für die Wellenmechanik festgestellt, was liegt dann näher, als die erweiterte *Newton*sche Bewegungsgleichung aufzustellen. Wir beschränken uns auf den rein elektrischen Fall und bilden mit *Novobátzky*[5] die Charakteristiken der Gleichung (3) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f_{wx}}{f_{w_t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{f_{wy}}{f_{w_t}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{f_{wz}}{f_{w_t}}; \quad (8)$$

$$-\frac{dW_x}{dt} = \frac{f_x}{f_{w_t}}, \quad -\frac{dW_y}{dt} = \frac{f_y}{f_{w_t}}, \quad -\frac{dW_z}{dt} = \frac{f_z}{f_{w_t}}; \quad (9)$$

dabei ist f der Differentialausdruck auf der linken Seite von (3) mit $\mathfrak{A} = 0$. Differenziert man (8) nach der Zeit und setzt (9) ein, so erhält man

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} \left(\mathbf{U} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right), \quad (10)$$

eine Newtonsche Bewegungsgleichung mit dem dichteabhängigen Zusatzpotential (1), die auch *Glaser* und *Bohm* angegeben haben. Durch weitere Umformung entsteht

$$m \cdot \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{m}{2} \operatorname{grad} v^2 - \operatorname{grad} \left(\mathbf{U} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right). \quad (11)$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der hydrodynamischen Grundgleichung für eine reibungslose Flüssigkeit, in der der Druck Z herrscht. Z hängt von der Grösse ϱ ab, die die Kontinuitätsgleichung (4) befriedigt und gemäss (7) normiert ist.

Dies gibt zu denken. Es bedeutet nichts anderes, als dass sich die Materie, der wir die Dichte $m\varrho$ zugeschrieben haben, wie eine Flüssigkeit verhält, auf die ausser der Kraft des Potentials \mathbf{U} noch die eines Zusatzpotentials einwirkt. Alle Unterschiede zum Verhalten normaler Flüssigkeiten, einschliesslich der der Quantisierung resultieren aus dieser Zusatzkraft, die — und das ist das charakteristische daran — dichteabhängig ist. Diese Dichteabhängigkeit ist die Ursache für das Zustandekommen der sogenannten Interferenzerscheinungen der Materie und damit ihres «optischen» Verhaltens.

Die Analogie zur Strömung verleiht natürlich keineswegs ein Recht dazu, die wellenmechanisch behandelten Systeme als Gase oder Flüssigkeiten variabler Dichten aufzufassen, genausowenig, wie die gewohnte Interpretation es erlaubt, die Materie als Wellen zu betrachten. Solche Vorstellungen können nur Modelle sein, die nicht durch Beweise gerechtfertigt werden, sondern einzige und allein durch ihre Brauchbarkeit als Anschauungshilfen, anhand deren man sich auf das analoge Verhalten stützend einen Überblick über die Situation verschafft, die der exakten Rechnung vorausgeht.

Es liegt nahe, zu untersuchen, wie weit sich die Beschreibung wellenmechanischer Systeme durch der Strömungslehre entnommene Gesetzmässigkeiten weitertreiben lässt.

Der Einfachheit halber soll die Massendichte $m\varrho$ einer fiktiven Schrödingermaterie (in Anlehnung an *Falk* und *Marschall*[6]) zugesprochen werden; ihr Bewegungszustand ist bis auf die notwendigen Anfangs- oder Randbedingungen durch (11) bestimmt. Führt man die in (8) angedeuteten Operationen aus und fasst zusammen,

$$m\mathbf{v} = \operatorname{grad} W, \quad (12)$$

so sieht man, dass sich die Schrödingermaterie wirbelfrei bewegt — das Geschwindigkeitspotential ist W/m . (11) kann daher auch in Form

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{grad} \left(U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right) \quad (13)$$

geschrieben werden.

Spezialisiert man (11) für den stationären Zustand $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \right)$ und integriert längs einer beliebigen Kurve, so erhält man den Energiesatz

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} = \text{const.} \quad (14)$$

in Form der *Bernoullischen* Gleichung.

III

Da beim Strömungsmodell in jedem Raumelement nicht nur die Dichte, sondern auch alle anderen charakteristischen physikalischen Eigenschaften definierte Werte haben, ist es nicht mehr notwendig, diese durch Operatoren zu ersetzen. Für den Zusammenhang mit diesen gilt die Bedingung, dass die statistischen Mittelwerte über die Operatoren gleich den Integralen der den Strömungszustand beschreibenden Größen über den Gesamtraum sein müssen. Es sei l eine physikalische Größe, \mathbf{l} der entsprechende Operator; dann muss

$$\int \bar{\psi} \mathbf{l} \psi d\tau = \int l \varrho d\tau. \quad (15)$$

Diese Gleichung war bisher zugleich das einzige Kriterium für die Bildung der Operatoren auf Grund des direkten formalen Vergleiches der Schrödinger-Gleichung mit der klassischen *Hamilton—Jacobi*-Gleichung. Beim Übergang zu differentiellen Größen lässt sie eine Willkür im Divergenzanteil zu. Schon die Gegenüberstellung von Impuls und Drehimpuls und den zugeordneten Operatoren macht dies deutlich:

$$p = \operatorname{grad} W = \frac{\hbar}{2i} \left(\frac{\operatorname{grad} \psi}{\psi} - \frac{\operatorname{grad} \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right), \quad p = \frac{\hbar}{i} \operatorname{grad} \psi; \quad (16)$$

$$q = [\mathbf{r} \operatorname{grad} W] = \frac{\hbar}{2i} \left[\mathbf{r} \left(\frac{\operatorname{grad} \psi}{\psi} - \frac{\operatorname{grad} \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) \right], \quad q = \frac{\hbar}{i} [\mathbf{r} \operatorname{grad} \psi]; \quad (17)$$

und legt eine Symmetrisierung durch Addition eines Divergenzanteils nahe.
Besondere Beachtung verdient die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2m} \operatorname{grad}^2 W = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\psi \bar{\psi}}}{\sqrt{\psi \bar{\psi}}} - \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) \quad (18)$$

für die man den Operator

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (19)$$

zu verwenden pflegt. Diese Zuordnung erfüllt nicht die Forderung (15). Grund dafür ist, dass man dabei das Zusatzpotential (1) stillschweigend in die kinetische Energie einbezogen hat, der Operator T entspricht also der Energiesumme $T + Z$. Manche Autoren haben dadurch einen Ausweg aus den sich daraus ergebenden Unstimmigkeiten zu schaffen versucht, dass sie diese Summe als eine kinetische Nullpunktsenergie ansahen, durch die die gewöhnliche kinetische Energie bei wellenmechanischen Problemen zu ersetzen sei[7].

IV

Auf Grund der letzten Überlegungen kann auch die Schrödingergleichung für den elektrostatischen Fall von einer anderen Seite betrachtet werden. Teilt man sie durch 2ψ und addiert die entsprechende Gleichung für die konjugiert komplexe Funktion ψ , so erhält man eine symmetrierte Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) + U + \frac{\hbar}{2i} \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\bar{\psi}}}{\bar{\psi}} \right) = 0, \quad (20)$$

die wegen

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} + \frac{\Delta \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right) = T + Z \quad (21)$$

und

$$\frac{\hbar}{2i} \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\bar{\psi}}}{\bar{\psi}} \right) = \frac{\delta W}{\delta t} \quad (22)$$

mit der erweiterten *Hamilton—Jacobi*schen Gleichung identisch ist. Aus der Subtraktion der beiden Gleichungen für ψ und $\bar{\psi}$ folgt

$$\frac{\hbar}{2im} \operatorname{div} (\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \bar{\psi}) + \frac{\delta(\psi\bar{\psi})}{\delta t} = 0, \quad (23)$$

also die Kontinuitätsgleichung. Verfährt man ebenso mit der zeitunabhängigen *Schrödinger*gleichung, so ergibt sich neben der Kontinuitätsgleichung die *Bernoulli*sche Gleichung.

Durch diese Betrachtung wird auch das Variationsprinzip der Wellenmechanik

$$\delta \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \bar{\psi} + (U - E) \psi\bar{\psi} \right\} d\tau = 0 \quad (24)$$

in ein anderes Licht gerückt. Formt man das Integral der linken Seite durch Subtraktion des Terms

$$\frac{1}{2} \int \operatorname{div} (\psi \operatorname{grad} \bar{\psi} + \bar{\psi} \operatorname{grad} \psi) d\tau = 0 \quad (25)$$

um, so erhält man

$$\delta \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} (\psi \Delta \bar{\psi} + \bar{\psi} \Delta \psi) + (U - E) \psi\bar{\psi} \right\} d\tau = 0. \quad (26)$$

Wegen

$$\delta \int E \psi\bar{\psi} d\tau \equiv 0 \quad (27)$$

und (21) wird dies

$$\delta \int \{ T + U + Z \} \varrho d\tau = 0. \quad (28)$$

Das Variationsprinzip (24) fordert also, dass die Gesamtenergie der Schrödingermaterie in den stationären Zuständen Extremwerte annimmt.

Die Rückkehr von den Operatoren zu definierten physikalischen Grössen, eine Konsequenz des Strömungsbildes, schafft äusserst durchsichtige Verhältnisse im Sinn der klassischen Anschauungen. Sie hat aber noch einen weiteren Vorteil. Es war bisher nicht gleichgültig, in welchem Koordinatensystem man bei der Einführung der Operatoren arbeitete; je nach dessen Wahl erhielt man voneinander abweichende Ergebnisse. Dieser Unsicherheitsfaktor ist bei der diskutierten Anschauungsweise ausgeschaltet.

Das Auftreten von Druckkräften

$$\mathfrak{A} = -\frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{grad} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \quad (29)$$

zeigt, dass die Schrödingermaterie sich in einem Spannungszustand befindet. Man kann ihn durch einen Tensor beschreiben, dessen Divergenz der Kraftdichte von (29) gleich sein muss:

$$\operatorname{Div} T \equiv \frac{\delta T_{ik}}{\delta x_i} = -\frac{\hbar^2}{2m} \varrho \frac{\delta}{\delta x_k} \left(\frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right). \quad (30)$$

Wegen der Identität

$$\varrho \frac{\delta}{\delta x_i} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \equiv \frac{\delta}{\delta x_k} \left(\sqrt{\varrho} \frac{\delta^2 \sqrt{\varrho}}{\delta x_i \delta x_k} \right) - \frac{\delta}{\delta x_k} \left(\frac{\delta \sqrt{\varrho}}{\delta x_i} \frac{\delta \sqrt{\varrho}}{\delta x_k} \right) \quad (31)$$

gelangt man zum symmetrischen Spannungstensor

$$T_{ik} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\delta \sqrt{\varrho}}{\delta x_i} \frac{\delta \sqrt{\varrho}}{\delta x_k} - \sqrt{\varrho} \frac{\delta^2 \sqrt{\varrho}}{\delta x_i \delta x_k} \right). \quad (32)$$

Man kann ihn in die Newtonsche Bewegungsgleichung (10) einführen und erhält

$$m \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\varrho \operatorname{grad} \mathbf{U} - \operatorname{Div} T. \quad (33)$$

Diese Form ist gut geeignet, um die Gültigkeit einiger allgemeiner mechanischer Prinzipien auch für die Schrödingermaterie nachzuweisen. Bei der Integration von (33) verschwindet nach dem Gaus'schen Satz das Integral über die Tensordivergenz und man kommt direkt zum Schwerpunktsatz

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} \mathbf{U}, \quad (34)$$

der für die Wellenmechanik erstmalig von Ehrenfest[8] bewiesen wurde.

Setzt man in

$$\varrho \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{p}] = \varrho \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] \quad (35)$$

den Ausdruck für $\varrho \frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ nach (33) ein und integriert,

$$\int \frac{d}{dt} [\mathfrak{r}\mathfrak{p}] \varrho d\tau = - \int [\mathfrak{r}\varrho \text{ grad } \mathbf{U} + \mathfrak{r} \text{ Div } \mathbf{T}] d\tau, \quad (36)$$

so findet man wegen

$$\int [\mathfrak{r} \text{ Div } \mathbf{T}] d\tau = - \int [T_{ki} - T_{ik}] d\tau = 0 \quad (37)$$

den Flächensatz

$$\overline{\frac{d}{dt} [\mathfrak{r}\mathfrak{p}]} = - \overline{[\mathfrak{r} \text{ grad } \mathbf{U}]} \quad (38)$$

Die inneren, vom Zusatzpotential stammenden Kräfte beeinflussen also weder die Schwerpunktsbewegung noch den Drehimpuls der Partikel.

Auch der Virialsatz ist für die Schrödingertheorie gültig. Zum Beweis bildet man

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p}) = \frac{1}{m} \mathfrak{p}^2 + \left(\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \right). \quad (39)$$

Dies wird unter Berücksichtigung von (10) durch Integration zum Virialsatz

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \text{ grad } \left(U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right)}. \quad (40)$$

Nach (30) und durch Beachtung der Identität

$$\int (\mathfrak{r} \text{ Div } \mathbf{T}) dt = - \int T_{ii} d\tau \quad (41)$$

kann (40) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes in die Form

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \text{ grad } \mathbf{U}} - \frac{\hbar^2}{m} \overline{\text{grad}^2 \sqrt{\varrho}} \quad (42)$$

oder

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathfrak{r}\mathfrak{p})} = 2\bar{T} - \overline{\mathfrak{r} \text{ grad } \mathbf{U}} + \frac{\hbar^2}{m} \overline{\sqrt{\varrho} \Delta \sqrt{\varrho}} \quad (43)$$

gebracht werden.

VI

Das Bemerkenswerte an den Arbeiten von *Glaser* und seinen Nachfolgern ist, dass darin der Formalismus der Quantenphysik auf das bewährte Fundament klassischer Theoreme aufgebaut und diese selbst als deren Erweiterung dargestellt wird. Über die Bedeutung dieses Verdienstes braucht kein Wort verloren werden.

Demgegenüber fällt viel weniger ins Gewicht, dass damit gleichzeitig eine neue Modellvorstellung auftaucht, die im Gegensatz zur herkömmlichen optischen einige bemerkenswerte Vorteile aufweist. Bekanntlich versagt das Wellenbild bereits beim Hinausgehen über die kräftefreie Bewegung, während hier das Strömungsmodell voll einsatzfähig ist; es bewährt sich übrigens genauso bei der Anwesenheit von magnetischen Kräften. Ebenso kann die *Klein—Gordon*-sche Gleichung in diesem Sinn interpretiert werden. Die Schwierigkeiten, die bei der *Diracschen* Gleichung auftreten, dürften dagegen in deren Unzulänglichkeit selbst zu suchen sein.

Man darf von einer Modellvorstellung nicht mehr verlangen, als sie ihrem Wesen nach geben kann. Es wäre unbillig, von einem Anschauungsbild zu fordern, es sollte neue Wege für die Behandlung der Mehrteilchenprobleme weisen. Auch hier bleibt seine Bewährung auf den Sektor der Veranschaulichung beschränkt. Wie man sich leicht überzeugt, ist es auf seinem Boden möglich, Partikelsysteme im normalen dreidimensionalen Raum zu betrachten. Dadurch wird allerdings die mathematische Behandlung nicht einfacher — das rechnerische Problem bleibt dasselbe, in welchen Parametern man auch rechnet, und auf eine Transformation in diesen kommt das Strömungsmodell praktisch heraus.

Auch das Dilemma, das zur statistischen Auffassung der Wellenmechanik geführt hat, wird durch das Strömungsbild in keiner Weise berührt — dieselben Gründe, die bisher zum Ausweg über die Wahrscheinlichkeitsdichte trieben, tun es auch hier. Es sind — kurz gesagt — die Tatsachen, die gegen eine nach aussen hin zwar abklingende aber doch beliebig weit endliche Masse und Ladung sprechen. Es soll auch nachdrücklich darauf hingewiesen werden, dass auch das statistische Verhalten nur eine Modellvorstellung ist. Mit demselben Recht könnte man annehmen, dass Massen- und Dichteverteilung bis ins Unendliche bestanden, dass es jedoch Kontraktionsmechanismen [9] gibt, die das »verschmierte« Teilchen zwingen, sich mit Überlichtgeschwindigkeit in einem Punkt zusammenzuziehen und dort z. B. als Elektron zu erscheinen. Im Endeffekt kommt beides auf dasselbe hinaus.

Die Vorteile des Strömungsbildes sind Anschaulichkeit und eine klar zum Ausdruck kommende Korrespondenz mit dem klassischen Theorem; das äussert sich besonders dadurch, dass das Rechnen mit Operatoren vermieden wird und dass sämtliche physikalisch sinnvollen Folgerungen aus der *Schrö-*

dingergleichung auch ohne Verwendung von physikalisch bedeutungslosen komplexen Größen gezogen werden können, wenn auch der Weg über diese meist mathematisch einfacher ist. Man braucht dazu nur statt der *Schrödinger-gleichung* die beiden entsprechenden gekoppelten Differentialgleichungen (*Newtonsche* Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung) zu lösen.

Besonders gute Dienste leistet das Strömungsbild dort, wo es sich darum handelt, die allgemeinen Prinzipien der klassischen Mechanik auf wellenmechanische Vorgänge anzuwenden oder zu erweitern. Ihre Gültigkeit lässt sich zwanglos und meist bedeutend einfacher als im gewohnten Formalismus der Wellenmechanik nachweisen; dadurch werden die gemeinsamen Grundlagen der klassischen Mechanik und der Quantenphysik festgelegt, aber auch die Unterschiede vergleichbar.

Herrn Prof. Dr. *Walter Glaser*, der mir seine Methode des Übergangs von der klassischen Mechanik zur Wellenmechanik schon vor der Veröffentlichung zugänglich machte, bin ich dafür zu grossem Dank verpflichtet. Weiter danke ich Herrn *Hermann W. Hofmann* für wertvolle Anregungen und Diskussionen.

LITERATUR

1. *W. Glaser*, Zur Herleitung der Schrödingerschen Wellengleichung, Vortrag bei der Österr. Physiker-Tagung in Graz, 8. und 9. Dez. 1950.
2. *W. Glaser*, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer Verlag, Wien (1952): 498 ff.
3. *D. Bohm*, Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of »Hidden« Variables, *Phys. Rev.* **85**, 166, 180, 1952.
4. *I. Fényes*, Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik, *Ztschr. f. Physik* **132**, 81, 1952.
5. *K. F. Novobätzky*, Das klassische Modell der Quantentheorie, *Ann. d. Phys.* **9**, 406, 1951.
6. *G. Falk* und *H. Marschall*, Das Schrödinger-Wellenfeld, *Ztschr. f. Naturforschung* **4a** 131, 1949.
7. *H. Hellmann*, Einführung in die Quantenchemie, Franz Deuticke, Leipzig und Wien (1937): 47.
8. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer-Verlag Wien (1949): 110.
9. *P. Ehrenfest*, Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik, *Ztschr. f. Physik* **45**, 455, 1927.
10. *Vergl. L. Jánossy*, Die physikalische Problematik des Teilchen—Wellen Problems der Quantenmechanik, *Ann. d. Phys.* **11**, 323, 1953.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

Х. В. ФРАНКЕ

Резюме

Была рассмотрена детерминистическая, именно гидродинамическая модель волновой механики. Вопрос об операторах волновой механики и им соответствующих физических величин гидродинамической модели был изучен, и были даны некоторые соотношения физических величин этой модели.

ON THE MEASUREMENT OF EFFICIENCY OF G.M.-COUNTERS

by

L. JÁNOSSY and D. KISS

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS, DEPARTMENT FOR COSMIC RAYS, BUDAPEST

(Received 1. IX. 1954.)

An improved method is given for the determination of the efficiencies of G. M.-counters. Special care has been taken to reduce spurious events resulting from cosmic showers and accidental coincidences. With help of the above method the efficiencies of G. M.-counters used in the authors' laboratory has been found in most cases to be about 99,3%.

In cosmic ray experiments G. M.-counters are used almost exclusively in coincidence or in anticoincidence arrangements. For such use the actual number of single discharges of a counter is immaterial; and thus for cosmic ray work only the *efficiency* of a counter is of importance. Efficiency of a counter is to be understood as the probability that it responds when struck by a cosmic ray particle.

Thus, in checking counters before use in cosmic ray experiments, it is essential to determine their efficiency as function of the applied voltage. If a counter is highly efficient in a not too narrow voltage interval, it can be safely used in any counter arrangement.

We constructed for the purpose of checking counters an apparatus employing the method described by Jánossy and Rochester[1]. We were able to improve to some extent upon the older technique, greater care being taken now than previously to eliminate spurious events. Thus the time needed for checking the efficiency of one counter has been somewhat reduced as compared to the time necessary with the older arrangement.

The principle of the arrangement is as follows. Vertical cosmic ray particles are registered by means of threefold coincidences (1, 2, 3), recorded with the arrangement consisting of the counters 1, 2, 3 placed vertically above each other. A gap is provided between the second and third counter for the counter X under investigation (see Fig. 1, the counter X is marked with a cross). Counters 1, 2, 3 are chosen in such a way that a particle moving along a straight line passing through each of them must necessarily pass also through the counter X; moreover, for safety the beam defined by 1, 2, 3 is somewhat narrower than the counter X. Thus if a single cosmic ray particle gives rise to a coincidence (1, 2, 3), then this particle must necessarily traverse also the counter X and thus each such coincidence (1, 2, 3) should normally be accompanied by the discharge of the counter X. Thus each coincidence (1, 2, 3) should at the same

time be a coincidence (1, 2, 3, X), provided the counter X responds to every particle passing through its sensitive volume.

The above consideration is, however, somewhat oversimplified. Coin-

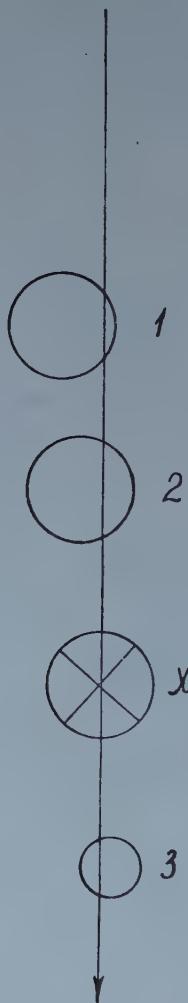


Fig. 1. Scheme of arrangement for the measurement of counter efficiency

cidences (1, 2, 3) are not only caused by single particles passing through the three counters, but such coincidences may also be caused by showers of simultaneous particles and they may also occur accidentally through the incidence of unconnected particles upon the counters 1, 2, 3 inside a sufficiently short interval of time. We may write

$$N'_3 = N_3 + n_3, \quad (1)$$

where N'_3 denotes the total number of coincidences (1, 2, 3) registered per unit time, N_3 the number of threefold coincidences, each one caused by a single particle moving along a straight line, n_3 the number of threefold coincidences caused otherwise.

An ideally good counter X would respond to every event N_3 and to some of the events n_3 . If the counter X responds to a particle passing through it with a probability

$$p = 1 - a,$$

then the rate of fourfold coincidences N'_4 caused by the discharges (1, 2, 3, X) is given by

$$N'_4 = (1 - a)N_3 + n_4, \quad (2)$$

where $n_4 < n_3$ is the number of events of the type n_3 which discharge not only the counters 1, 2, 3 but also the counter X. Subtracting (2) from (1) we find

$$N'_3 - N'_4 = aN_3 + n_3 - n_4.$$

Neglecting for the moment n_3 and n_4 , we can put as a first approximation ($N_3 = N'_3$, $n_3 \sim n_4 \sim 0$), thus

$$a \approx \frac{N'_3 - N'_4}{N'_3} = \beta \quad (\text{say}).$$

The value of β can thus be obtained from the observation of threefold and fourfold coincidences; β is rather larger than a , we have namely

$$\beta \approx a + \frac{n_3 - n_4}{N'_3},$$

nevertheless β can be taken as first approximation of the »inefficiency« of the counter. (The exact inefficiency is given by a .)

The difference $A'_{34} = N'_3 - N'_4$ can be measured by counting separately the coincidences (1, 2, 3) and the coincidences (1, 2, 3, X). This procedure leads, however, to very inaccurate results, since the value of the difference is small compared with the values N'_3 and N'_4 themselves. So as to avoid this difficulty it is convenient to count *directly* those threefold coincidences which are not at the same time fourfold coincidences; thus it is convenient to measure the small difference A'_{34} directly. In other words, it is convenient to register simultaneously the coincidences (1, 2, 3) and the anticoincidences (1, 2, 3, — X); the rates of these coincidences and anticoincidences give directly the values of N'_3 and A'_{34} , respectively.

Varying the voltage of the counter X, we may measure β as a function of the voltage applied on the counter as far as we take β as the approximate

value of the inefficiency, we get thus the desired characteristic of the counter. For too small or too high voltages the counter X does not work satisfactorily, in both cases α and therefore also β will have appreciable values. For a good counter there exists a working region where β will not depend appreciably on the applied voltage and thus it can be presumed that in this region α does not depend either on the applied voltage. The purpose of the test is to ascertain for each counter, whether such a region exists, and if so, the extent of this region.

Applying to a given counter two voltages V_1 and V_2 in succession, we get, say

$$\left(\frac{A'_{34}}{N'_3} \right)_{V=V_1} = \beta_1, \quad \left(\frac{A'_{34}}{N'_3} \right)_{V=V_2} = \beta_2.$$

If $\beta_1 \sim \beta_2$, we see that the change of voltage from V_1 to V_2 does not affect the working of the counter and this region can be regarded as part of the plateau of the counter.

Since

$$\beta = \frac{A'_{34}}{N'_3},$$

we have for the statistical error of β caused by the statistical fluctuation of A'_{34} and N'_3

$$\delta\beta = \beta \sqrt{\frac{1}{tA'_{34}} + \frac{1}{tN'_3}};$$

since $N'_3 \gg A'_{34}$, we have approximately

$$\delta\beta \sim \frac{\beta}{\sqrt{tA'_{34}}} = \sqrt{\frac{\beta}{tN'_3}}.$$

So as to establish whether there is a significant difference between the values β_1 and β_2 obtained at voltages V_1 and V_2 , we have to form

$$\delta(\beta_1 - \beta_2) = \sqrt{(\delta\beta_1)^2 + (\delta\beta_2)^2} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{tN'_3}}. \quad (3)$$

Even if the numerical values of β_1 and β_2 obtained by a measurement differ only little, it cannot be excluded that they do differ in fact and the difference is merely covered by fluctuation. Thus a difference of the order of the expression (3) cannot be excluded. Thus in order to ascertain that the counter X is essen-

tially insensitive to a change of voltage from V_1 to V_2 , one has to measure for a sufficiently long time so as to make $\sqrt{(\beta_1 + \beta_2)/tN'_3}$ sufficiently small. This is necessarily a slow procedure since the error $\delta(\beta_1 - \beta_2)$ decreases only with \sqrt{t} . So as to accelerate the process of measurement as much as possible, it is important to reduce the background n_3 and thus to reduce the value of β . If we succeed e. g. in reducing the β -values to half their original values, we can reduce the time of measurement by a factor 2 without loss of accuracy.

The β -values can be reduced by reducing n_3 and thus $n_3 - n_4$; this reduction has not only the advantage of speeding up the measurement, but the smaller n_3 , the better β approximates the physically interesting quantity α itself.

For the sake of illustration we give a numerical example.

X = counter No 300

V	1000+50	1000+100	1000+150	1000+200	Velt*
$N'_3 - N'_4$	49	43	28	41	
N'_3	1219	1283	1260	1311	per 20 minutes

* 1000 V being the starting potential

Here the number of anticoincidences is too high to allow any useful conclusion to be drawn from the material. Thus it was necessary to improve the method and to reduce the events n_3 . The events n_3 are partly caused by accidental coincidences, partly by air showers. We discuss these events separately.

Accidental coincidences

Accidental coincidences may arise chiefly as follows.

(1) Three independent discharges take place in the counters 1, 2, 3; the rate of these events is

$$n_3^{(1)} = 3M_1 M_2 M_3 \tau^2,$$

where M_1 , M_2 and M_3 are the rates of discharges of the three counters and

$$\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

is the resolving time of the coincidence arrangement. Putting $M_1 \approx M_2 \approx M_3 = 10/\text{sec}$, we find

$$n_3^{(1)} = 1.2 \cdot 10^{-8}/\text{sec} = 1.4 \times 10^{-5}/20 \text{ minutes},$$

thus the latter effect is altogether negligible. More important but still negligible is the effect due to particles passing through 1 and 2 but not X, accompanied

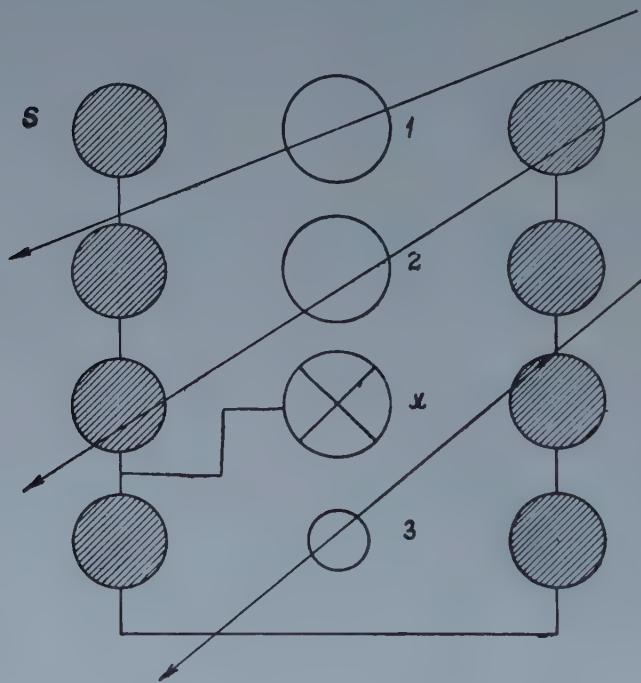


Fig. 2. With the help of side counters showers are eliminated.

by an independent discharge of 3, the latter also unaccompanied by a discharge of X. The rates are

$$\bar{M}_1 = (1, 2, - X) = 1.22/\text{sec}$$

$$\bar{M}_2 = (3, - X) = 4.91/\text{sec},$$

and the rate of accidentals due to this cause

$$2\tau \bar{M}_1 \bar{M}_2 = 2.9 \cdot 10^{-2} \text{ per 20 minutes.}$$

Thus we conclude that the effects of accidental coincidences in our arrangement are negligible.

Showers

So as to reduce the effects of showers, we surrounded the vertical arrangement with a number of side counters S connected all in parallel (see Fig. 2). The discharges of these counters are fed into the anticoincidence channel and thus we record anticoincidences

$$\bar{A}_{34} = (1, 2, 3, -X, -S)$$

and anticoincidences

$$\bar{N}_3 = (1, 2, 3, -S).$$

Since a particle passing through 1, 2, 3 cannot possibly reach any of the counters S , the anticoincidences \bar{N}_3 contain all those coincidences caused by single particles passing through 1, 2, 3. On the other hand the shield S consisting of 8 counters (see Fig. 2) is so extensive that showers will hardly fail to discharge at least one of them; thus anticoincidences $(1, 2, 3, -S)$ will hardly contain showers. In good approximation we may thus assume (compare equ. (1))

$$\bar{N}_3 \approx N_3$$

and

$$\bar{A}_{34} \approx aN_3,$$

thus

$$a \approx \frac{\bar{A}_{34}}{\bar{N}_3} = \bar{\beta},$$

where $\bar{\beta}$ obtained in this way gives a distinctly better approximation for the value of a (the insensitivity of the counter) than does β .

We give an example of the results obtained with the improved set.

V	1000+50	1000+100	1000+150	1000+200	Volt
(1, 2, 3, -X, -S)	11	5	6	15	
(1, 2, 3, -S)	1262	1269	1267	1215	
$\bar{\beta}$	0,0087	0,0039	0,0047	0,0123	per 20 minutes

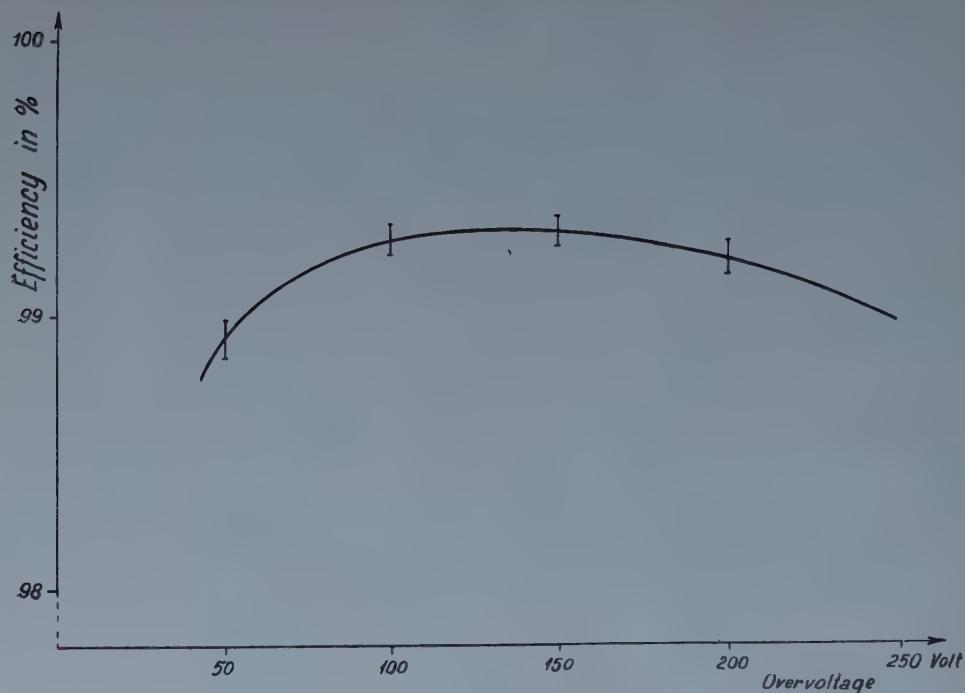


Fig. 3. Characteristics averaged over 50 counters

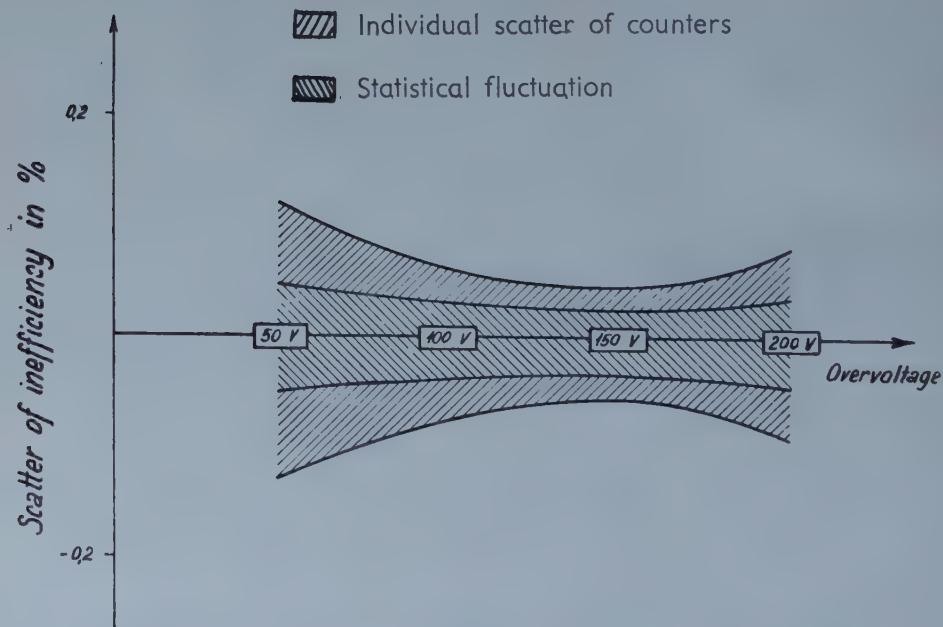


Fig. 4. Comparison of the individual scatter of 50 counters with the statistical fluctuation of average efficiency

From the above table we see that $V = 50$ is somewhat low, $V = 200$ on the other hand is rather high for the counter under investigation. Further, comparing $V_1 = 100$ and $V_2 = 150$, we have

$$\beta_1 - \beta_2 = 0,0008 \pm 0,0026.$$

Thus allowing for a deviation as much as three times the standard error, the efficiency of the counter may change as much as 0,86%, although it is likely that it changes somewhat less.

Since $a \leq \bar{\beta}$, we see that the counter in question shows an efficiency of at least 99,5% in the region of 100—150 Volt. The fact that the efficiency of the counters is less than 100% is partly due to the dead time of the quenching circuit. Here, however, we do not deal with this question.

The apparatus described above is in permanent use in our laboratory, and counters are rejected if they show less than 99,00% efficiency in a region of 100 Volt.

So as to ascertain whether or not the efficiencies of individual counters obtained by our arrangement, scatter more than is to be expected from the statistical uncertainties of the individual data, we averaged the efficiencies over 50 counters. The result thus obtained is shown in Fig. 3. It is seen that for voltages near the middle of the plateau the data scatter around

$$0,7\%$$

inefficiency. Fig. 4 shows that the scatter is not more than is to be expected from the fluctuation of the individual data. For larger and smaller voltages, however, the individual data give a larger scatter, showing that outside the centre region of the plateau there are systematic differences in the behaviour of individual counters.

A detailed description of the apparatus and of our results has been given by us in the Communications of our Institute [2].

REFERENCES

1. L. Jánossy and G. D. Rochester, Phys. Rev. **63**, 52, 1943.
2. L. Jánossy and D. Kiss, Központi Fizikai Kutató Intézet Kiadványai, **1**, 36, 1953.

ИЗМЕРЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЧЕТЧИКОВ ГЕЙГЕРА-МЮЛЛЕРА

Л. Яноши и Д. Киш

Р е з ю м е

Авторами был совершенствован метод измерения эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера. Особое внимание уделялось исключению ложных импульсов, вызванных космическими ливнями и случайными совпадениями. С применением этого метода эффективность счетчиков Г. М., применяемых в лаборатории авторов, в большинстве случаев составляет около 99,3 процентов.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

BRIEF REPORTS — KURZE MITTEILUNGEN AN ASYMPTOTICAL METHOD FOR THE CALCULATION OF EIGENFUNCTIONS

By

J. I. HORVÁTH

DEPARTMENT OF THEORETICAL PHYSICS, UNIVERSITY OF SZEGED, SZEGED

(Received 8. VI. 1954.)

Some months ago a variational method was reported by *L. G. Biedenharn* and *J. M. Blatt* for the calculation of eigenfunctions [1]. Their investigations may be deemed to be of great interest because in the case of approximative solutions of the wave equation of the quantum mechanical many-body problems it would be necessary, time after time, to calculate the eigenfunctions in the same order of approximation as the eigenvalues themselves. It is namely well known that by applying the usual perturbation methods in an approximation of first order the eigenvalues can be determined on the basis of the knowledge of the eigenfunctions in zero order. However, in practice the calculation of the eigenfunctions in first order is a very difficult problem for which the knowledge of the spectrum of the Hamiltonian in zero order is needed.

The variational method, which is a very useful and simple approximative method for the calculation of the eigenvalues, gives for example in the case of eigenfunctions a very bad approximation [3] and what is more, it may also occur that the sequence of the approximate functions does not converge towards the correct eigenfunction even if the sequence of the corresponding approximate eigenvalues converges very well towards the correct eigenvalue [2].

Hence it would be a very interesting and important problem to carry out the programme proposed in the paper of *Biedenharn* and *Blatt*. Their proposition seems to be very fundamental and useful, but the formulation of their method, as it is given in the paper mentioned, is not successful and is disputable from some points of view. In the following I shall not criticize the paper in detail, but I should like to formulate their method in a more acceptable manner and to supplement it with some further remarks.

Consider the eigenvalue problem

$$H\psi = \lambda\psi,$$

where H is the Hamiltonian of the system considered. Let the eigenvalues of H be $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ and the corresponding eigenfunctions ψ_1, ψ_2, \dots . Let us assume that H has a discrete spectrum; the formulation of the results does not cause any difficulties in the general case. The set of eigenfunctions $\{\psi_u\}$ is

then an orthonormal and complete set of functions ψ_n in the usual way:

$$(\psi_k, \psi_l) = \delta_{kl}; \quad (\psi_k, H\psi_l) = \lambda_l \delta_{kl}.$$

Let us now suppose that an arbitrary complete-orthonormal set of functions Φ_1, Φ_2, \dots is given and, furthermore, that the functions of the set $\vec{\Phi} = \{\psi_u\}$ can be deduced from the set $\vec{\psi} = \{\psi_n\}$ by an infinitesimal transformation Q as follows:

$$\Phi_k = \psi_k + \sum_{i=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i, \quad (1)$$

where the squares and the products of the components of the matrix Q are negligible in second order.

Equation (1) can also be written in the form

$$\vec{\Phi} = (1 + Q) \vec{\psi}, \quad (1')$$

and

$$\vec{\psi} = (1 + Q)^{-1} \vec{\Phi} = \vec{\Phi} - Q \vec{\Phi} + O(Q^2), \quad (2)$$

respectively.

The set of functions $\{\Phi_n\}$ was supposed to be an orthonormal one so that

$$\begin{aligned} (\Phi_k, \Phi_l) &= ([\psi_k + \sum_{i=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i], \psi_l + \sum_{j=1}^{\infty} p_{lj} \psi_j) = (\psi_k, \psi_l) + (\psi_l, \sum_{j=1}^{\infty} q_{lj} \psi_j) + \\ &+ (\sum_{j=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i, \psi_l) + \sum_{j=1}^{\infty} q_{ki} \psi_i \sum_{j=1}^{\infty} q_{lj} \psi_j = (\psi_k, \psi_l) + q_{lk} + q_{kl}^* + O(Q^2); \end{aligned}$$

consequently

$$q_{kl}^* = -q_{lk},$$

therefore

$$Q^+ = -Q. \quad (3)$$

Using these results it can be deduced elementarily that

$$\psi_k = \Phi_k - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Phi_i, H\Phi_k)}{\omega_i - \omega_k} \Phi_i + O(Q^2), \quad (4)$$

where

$$(\Phi_k, H\Phi_k) = \omega_k + O(Q^2),$$

assuming that the operators H and Q are commutative.

The formulation of the method given by *Biedenharn* and *Blatt* diverges from the one mentioned above in two points. First of all they use a finite set of functions ; secondly our equation (1') is given in their paper as

$$\varphi_k = (1 + Q) \psi_k.$$

It is easily seen that using two finite sets of functions $\vec{\Phi}$ and $\vec{\psi}$, it cannot be taken for granted that the conditions made above can be fulfilled.

Our result (4) — as *Biedenharn* and *Blatt* also remark — seems to be very similar to the familiar formula of the ordinary perturbation theory. Nevertheless our point of view is different. In the case of the ordinary perturbation theory the trial Hamiltonian is reduced — often in an arbitrary way — as follows :

$$H = H_0 + W,$$

where W is the operator of the perturbation. Then, in the formula for ψ_k , which is formally the same as our equation (4), we have in the denominator instead of the ω 's the eigenvalues and instead of our trial functions Φ_n the exact eigenfunctions of the Hamiltonian H . *Biedenharn* and *Blatt*'s method, on the other hand, has the advantage that the Hamiltonian of the system need not be reduced for the calculation of the approximate eigenfunctions in first order.

Of course, it is well known that in the case of any complete-orthonormal set of functions there exists a linear and self-adjoint operator L , the eigenfunctions of which are the given functions Φ_n ; consequently the corresponding »operator of perturbation« $W = H - L$ can be defined ; the circumstance that this reduction of the Hamiltonian is not based on any physical considerations has often considerable advantages.

In the paper of *Biedenharn* and *Blatt* the generalizations of the results discussed above are also given for a non-orthogonal set of the trial functions $\{\Phi_n\}$ and also for the degenerate case of the eigenvalue problems. In our case such a generalization does not present any new problem, hence these cases are not discussed in detail.

Finally, we should like to propose a procedure for the construction of the trial set of functions $\{\Phi_n\}$. This construction has no importance from the point of view of the method discussed, neither is it given in the cited paper of *Biedenharn* and *Blatt*. Nevertheless, it seems desirable to give the method of the construction using the variational method.

Let us take as starting-point of our method, a suitable function Φ'_1 which contains some variational parameters and determine the parameters in such a manner that $\omega_1 = (\Phi'_1, H\Phi'_1)$ should be minimal. In the second step we use a second function Φ'_2 , which contains some variational parameters and determine the parameters of Φ'_2 , so that on the one hand $\omega_2 = (\Phi'_2, H\Phi'_2)$ should

be minimal and on the other Φ'_2 should be orthogonal to Φ'_1 , etc. Thus by normalization of the functions Φ'_k we obtain a suitable trial set of functions $\{\Phi_k\}$ and our quantities ω_k give the first approximation of the eigenvalues λ_k .

The applicability of the method depends on the rapidity of the convergence of the series in equation (4).

REFERENCES

1. *L. C. Biedenharn and J. M. Blatt*, Phys. Rev. **93**, 230, 1954.
2. *P. Gombás*, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Birkhäuser, Basel, 1950. P. 153.
3. *J. I. Horváth*, Acta Phys. Hung. **3**, 323, 1954.

ERWEITERUNG DER HARTREE-FOCKSCHEN GLEICHUNGEN DURCH DIE KORRELATION DER ELEKTRONEN

Von

P. GOMBÁS

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

(Eingegangen : 10. IX. 1954)

Ein Mangel der Hartree-Fockschen Methode des self-consistent field ist das Fehlen des Korrelation-Anteils der Elektronen. Mit dem zuerst von *Wigner*[1] und später von *Macke*[2] hergeleiteten Ausdruck der Korrelationsenergie eines Elektronengases freier Elektronen könnte man — wenn die Abhängigkeit der Korrelationswechselwirkung vom Quantenzustand, d. h. vom Impulsvektor der Elektronen in einer brauchbaren analytischen Form dargestellt werden könnte — ganz ähnlich wie dies *Slater*[3] für die Austauschwechselwirkung der Elektronen getan hat, die Korrelationswechselwirkung der Elektronen durch ein mittleres Potential darstellen, indem man das Korrelationspotential oder die Korrelationsenergie zwischen zwei herausgegriffenen Elektronen über alle möglichen Elektronenzustände eines Elektrons hinwegmittelt.

Von *Macke* wurde zwar die Abhängigkeit der Korrelationsenergie vom Impulsvektor der freien Elektronen in analytischer Form angegeben, doch ist der Ausdruck sehr kompliziert, so dass die Mittelung zu mathematischen Schwierigkeiten führen würde, oder aber müsste man Vernachlässigungen vornehmen, durch die das Resultat voraussichtlich stark beeinflusst würde.

In einem Fall und zwar für ein Valenzelektron in einem Atom, das sich ausserhalb eines Rumpfes mit abgeschlossenen Elektronenschalen befindet, lässt sich jedoch das Korrelationspotential einfach angeben. Man kann dann folgendermassen verfahren.

Man behandelt den Atomrumpf statistisch und beschreibt diesen als ein einfache geladenes positives Ion mit der Elektronendichte ϱ . Im neutralen Atom ist nun zum Atomrumpf das wellenmechanisch behandelte Valenzelektron mit der Dichte $\delta\varrho = \psi\psi^*$ hinzuzufügen, wo ψ die Eigenfunktion des wellenmechanisch behandelten Valenzelektrons und ψ^* deren konjugiert Komplexe bezeichnet. Die gesamte Elektronendichte im Atom wird also $\varrho' = \varrho + \delta\varrho$. Für die durch die Hinzufügung des Valenzelektrons entstehende Änderung der Korrelationsenergie E_w ergibt sich durch eine Reihenentwicklung nach der kleinen Grösse $\delta\varrho$ und Vernachlässigung der Glieder, die von zweiter und höherer Ordnung klein sind

$$\delta E_w = \int \frac{\partial W}{\partial \varrho} \delta\varrho dv, \quad (1)$$

wo W die Dichte der Korrelationsenergie bezeichnet. Hieraus erhält man für das Korrelationspotential in Bezug auf das Valenzelektron, d. h. das Elektron mit der höchstmöglichen Energie

$$V_w = -\frac{1}{e} \frac{\partial W}{\partial \varrho} . \quad (2)$$

Für W wurde von *Wigner*[4] der Ausdruck

$$W = -\frac{a_1 e \varrho^{1/3}}{\varrho^{1/3} + a_2} \varrho \quad (3)$$

mit

$$a_1 = 0,05647 \frac{e}{a_0} \quad \text{und} \quad a_2 = 0,1216 \frac{1}{a_0} \quad (4)$$

hergeleitet, wo e die positive Elementarladung und a_0 den ersten Bohrschen Wasserstoffradius bezeichnet. Mit diesem Ausdruck ergibt sich für das Korrelationspotential aus (2)

$$V_w = a_1 \frac{\varrho^{1/3}}{\varrho^{1/3} + a_2} + \frac{a_1 a_2}{3} \frac{\varrho^{1/3}}{(\varrho^{1/3} + a_2)^2} . \quad (5)$$

Durch Heranziehen des Korrelationspotentials in den Hartree-Fockschen Gleichungen des self-consistent field für ein Valenzelektron in einem Atom lässt sich eine über diese Gleichungen hinausgehende Näherung erzielen. Da die Korrelationskorrektion klein ist, kann man die Korrelationskorrektion ε der Hartree-Fockschen Energiterme durch die wellenmechanische Formel für die Störungsenergie erster Ordnung

$$\varepsilon = - \int V_w e \psi \psi^* d\mathbf{v}$$

bestimmen.

Auf diese Weise haben wir die Korrelationskorrektion der Grundterme des Valenzelektrons in Alkaliatomen abgeschätzt und erhielten Energien von etwa — 0,2 e-Volt, die die richtige Größenordnung haben.

LITERATUR

1. *E. Wigner*, Phys. Rev. (2) **46**, 1002, 1934.
2. *W. Macke*, ZS. f. Naturforschung, **5a**, 192, 1950.
3. *J. C. Slater*, Phys. Rev. (2) **81**, 385, 1951.
4. *E. Wigner*, l. c.; man vgl. auch *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 27 ff., Springer, Wien, 1949.

Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des ravaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement par volume est de 110 forints.

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur de Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German.

The *Acta Physica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica* is 110 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereich der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankkonto: Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Á. Bardócz: Untersuchungen über Lichtquellen für Spektralanalyse. Ein elektronisch gesteuerter Funkenerzeuger. — А. Бардоц: Искровой возбудитель с электроническим управлением для целей спектрального анализа 91

G. Györgyi: Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika — Г. Дьёрди: Движение энергетического центра и тензор импульса энергии в диэлектриках 121

I. Fényes: Über das Divergenzproblem der W. K. B. Methode — И. Феньеш: О проблеме расходимости метода В. К. Б. 133

F. Berencz.: A New Method for the Calculation of the Energy of the Hydrogen Molecule — Ф. Беренц: Об одном новом методе вычисления энергии связи водородной молекулы 149

G. Szamosi: On the Quantum Statistics of Nucleons — Г. Самоши: О квантовой статистике нуклеонов 155

Herbert W. Franke: Ein Strömungsmodell der Wellenmechanik — Х. В. Франке: Гидродинамическая модель волновой механики 163

J. Jánossy and D. Kiss: On the Measurement of Efficiency of G.-M.-Counters — Л. Яноши и Д. Киш: Измерение эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера 173

Краткие сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen

J. I. Horváth: An Asymptotical Method for the Calculation of Eigenfunctions 183

P. Gombás: Erweiterung der Hartree—Fockischen Gleichungen durch die Korrelation der Elektronen 187